Índice

Tema 8

Contrastes no paramétricos

8.1 Introducción

Los métodos de Inferencia Estadística estudiados hasta este momento se encuentran dentro de las técnicas paramétricas. Éstas se caracterizan por el conocimiento del modelo de distribución de la población bajo estudio, y donde a lo sumo, se desconoce un número finito de parámetros de dicha distribución.

Es preciso desarrollar métodos que no requieran el conocimiento de la distribución de la muestra para inferir propiedades de la población. Son los llamados métodos de distribución libre o no paramétricos. Éstos se caracterizan por el desconocimiento de dicha forma funcional, y se utilizan estadísticos cuya distribución se determina con independencia de cuál sea la distribución de la población. No obstante, lo anterior no significa que esta distribución no esté sometida a condición alguna, sino que se requieren hipótesis mucho más generales, como por ejemplo que sea continua o discreta.

En las *técnicas no paramétricas* podemos distinguir una doble vertiente:

- Son una alternativa, cuando no pueden emplearse métodos paramétricos por no verificarse sus condiciones específicas.

- Permiten resolver nuevos problemas planteados. Por ejemplo, obtener información sobre la forma de la distribución de la población de la que se ha extraído la muestra.

En este tema nos centraremos en abordar un problema importante dentro de la estadística no paramétrica, el de obtener información sobre la forma de la población que ha originado la muestra. Presentaremos así los *contrastes de bondad de ajuste.*

8.2 Bondad de ajuste

El objetivo de los tests de bondad de ajuste es contrastar si los datos muestrales pueden considerarse procedentes de una distribución determinada. Se seguirá el siguiente esquema: planteamiento de las hipótesis, estadístico asociado, región crítica, y se citarán algunas de las propiedades del test, destacando las condiciones en que éste debe aplicarse. Como contrastes de bondad de ajuste se destacan :

- Tests de Kolmogorov-Smirnov y χ^2 de bondad de ajuste.

- Contrastes específicos para la distribución normal: gráficos de normalidad y test de Shapiro-Wilks.

8.2.1 Test de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste

Consideremos $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una v.a. X. Se define la *función de distribución empírica de la muestra*, a la que denotaremos por $F_n^*(x)$, como:

$$F_n^*(x) = \text{ proporción de observaciones en la muestra menores o iguales que x,} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \,.$$

El test de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste se basa en comparar la función de distribución empírica de la muestra con la función de distribución que se propone para describir los datos, $F_0(x)$. Es válido únicamente para variables aleatorias continuas. Veamos este test a continuación.

Sea X una variable aleatoria *continua* con función de distribución F. Se plantea el contraste

$H_0: \ F(x) = F_0(x)$, para todo x

$H_1: \ F(x) \neq F_0(x)$, para algún x

Es decir, se propone un modelo de distribución para los datos, $F_0(x)$, y como alternativa que los datos no se distribuyen según este modelo.

- **Estadístico:**

$$D(X_1, \ldots, X_n) \ = \ \sup_x |F_n^*(x) - F_0(x)|$$

con $F_n^*(x)$ la función de distribución empírica de la muestra.

Este estadístico calcula la discrepancia máxima entre la función de distribución empírica, y la propuesta en H_0.

- **R. C.:** $D(X_1, \ldots, X_n) \geq d_{n,1-\alpha}$

Al realizar este contraste en SPSS obtenemos como salida el valor experimental del estadístico, y el p-valor del contraste (con la denominación de Significance). Rechazaremos H_0 si el p-valor obtenido es menor que el nivel de significación elegido para realizar el test.

8.2.2 Test chi-cuadrado de bondad de ajuste

Consideremos X una v.a. discreta que toma k valores. Se plantea el contraste

$H_0: \ P[X = i] = p_{i,0}$, para todo $i = 1, \ldots, k$

$H_1: \ P[X = i] \neq p_{i,0}$, para algún $i = 1, \ldots, k$

Dada $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X, con n elevado, sea

$$F_i \ = \ card\{X_j = i\} \ , \qquad i = 1, \ldots, k \ .$$

- **Estadístico**:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(F_i - np_{i,0})^2}{np_{i,0}} \ .$$

- **Región crítica**: $\chi^2 \geq \chi^2_{k-1,1-\alpha}$

El fundamento del test es comparar las frecuencias observadas para cada clase, F_i, con las especificadas por el modelo teórico que se propone. Se rechaza H_0 si el valor del estadístico es elevado.

Este test aunque se ha planteado inicialmente para variables discretas, también es válido para variables continuas (en este caso dividiríamos el soporte de la variable en k clases).

8.2.3 Tests de Normalidad

Si queramos contrastar la normalidad de unas observaciones la prueba de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste puede mejorarse. Para tratar la normalidad de las observaciones tenemos: *métodos gráficos*, y contrastes específicos como el *test de Shapiro y Wilks*.

- *Gráficos de normalidad*

Existen numerosos gráficos que pueden ayudarnos a corroborar la normalidad de unas observaciones, algunos de ellos como el histograma, diagrama de troncos y hojas o los diagramas de caja son ya conocidos de Estadística Descriptiva. Estos gráficos pueden ayudarnos a juzgar si la hipótesis de normalidad puede ser adecuada para nuestros datos. Por ejemplo, si nuestros datos provienen de una distribución normal, la muestra no debe presentar de forma clara una fuerte asimetría. Sin embargo, con pocas observaciones, estos gráficos son difíciles de interpretar, motivo por el cuál se han diseñado gráficos específicos para la normalidad, son los llamados gráficos de normalidad. Se recogen en la mayoría de los programas estadísticos como *gráficos de probabilidad - probabilidad normal* ó P-P plots, y *gráficos de cuantiles - cuantiles normales* ó Q-Q plots. En ellos los datos se estandarizan y se ordenan. Al representarlos frente a los datos esperados de una distribución $N(0, 1)$ se deben obtener puntos alineados en la diagonal de un cuadrado.

Q-Q plot: En este gráfico se representan los cuantiles empíricos obtenidos en la muestra frente al cuantil correspondiente de la distribución normal. Si el gráfico obtenido muestra una relación cercana a una línea recta entonces éste sugiere que los datos provienen de una distribución normal. Éste gráfico nos lo da como salida el SPSS.

P-P plot: Este gráfico se construye a partir de la función de distribución empírica de la muestra, $F_n^*(x)$. El gráfico está diseñado de forma que al representar para cada observación x_i, la $F_n^*(x_i)$ frente a la esperada se obtenga una línea recta si los datos son normales.

- *Test de Shapiro-Wilks*

En general, la prueba de Shapiro-Wilks es más adecuada para contrastar la normalidad de las observaciones que el test de Kolmogorov-Smirnov, de ahí que la recojamos en este epígrafe.

Consideramos X una variable aleatoria con función de distribución F. Se plantea el contraste

$H_0 : \ X \sim$ Normal

$H_1 : \ X \nsim$ Normal

El estadístico de Shapiro-Wilks, al que denotaremos por W, mide el ajuste de la muestra, representada en el papel probabilístico normal (P-P plot) a una recta. Se rechaza la normalidad cuando el ajuste lineal es malo, lo que se reflejaría en valores pequeños del estadístico. Así la región crítica de este contraste es

R.C.: $W \leq w_{n,\alpha}$

Al realizar este contraste en SPSS obtenemos como salida el valor experimental del estadístico, y el p-valor del contraste (con la denominación de Significance). Rechazaremos H_0 si el p-valor obtenido es menor que el nivel de significación elegido para realizar el test.

8.3 Comparación de dos poblaciones

A lo largo de este curso se ha supuesto en numerosas ocasiones que la característica o características estudiadas seguían una distribución normal. En la sección anterior hemos introducido con los contrastes de bondad de ajuste la herramienta para modelar el problema de forma completa.

En primer lugar, dados unos datos, contrastaremos si se puede suponer que provienen de una distribución normal (hipótesis nula), frente a la hipótesis alternativa de que los datos no son normales. Nos ayudaremos también de los métodos gráficos para estudiar la normalidad. Dependiendo del resultado de estas pruebas procederemos como sigue:

- Si *se acepta la normalidad* de las observaciones, aplicaremos el contraste paramétrico para poblaciones normales adecuado al problema. Por ejemplo, sobre la media de una población normal, o sobre la igualdad de medias en dos poblaciones normales (independientes o relacionadas).

- Si *se rechaza la normalidad* de las observaciones, tenemos técnicas que son la contrapartida no paramétrica a los tests basados en la distribución t de Student que vimos para poblaciones normales. En el caso no paramétrico, los tests se plantean sobre la mediana de la distribución. Así veremos en las aplicaciones prácticas:

- El *test de los rangos signos de Wilcoxon* para una muestra. Este test permite en el caso continuo contrastar si podemos suponer un valor m_0 como mediana de unas observaciones, y también permite comparar las medianas de dos muestras apareadas.
- El *test U de Mann-Whitney (ó de Wilcoxon)* para dos muestras independientes. Este test permite en el caso continuo comparar dos muestras independientes. Como hipótesis nula se propone la igualdad de las distribuciones, frente a la alternativa de que son distintas porque difieren en localización.

En los problemas y aplicaciones se verán detalles sobre cómo proceder e ilustraremos estos comentarios.