Índice

Tema 3

Variables aleatorias. Función de distribución y características asociadas

3.1 Introducción

En este tema pasamos a representar los resultados de un experimento aleatorio por números. Introducimos así el concepto de *variable aleatoria*, y las herramientas para trabajar con ellas. Distinguimos entre *variables aleatorias discretas* y *variables aleatorias continuas.* Los conceptos que se presentan son fundamentales para temas posteriores, especialmente en el tema 4 en que se estudian los modelos de distribuciones más relevantes.

Así mismo para finalizar el tema se realiza una breve introducción al estudio de las *variables aleatorias bidimensionales (y multidimensionales).* Destacando el caso particular en que las variables implicadas son independientes.

3.2 Concepto de variable aleatoria.

En numerosas ocasiones estaremos interesados en un resumen numérico asociado al experimento aleatorio que estemos estudiando más que en la estructura probabilística asociada al espacio muestral de dicho experimento. Por ejemplo, consideremos un estudio de mercado en que se pregunta a 50 individuos si poseen línea ADSL en casa. Representamos por "1" que el individuo en cuestión la tenga, y por "0" que no. El espacio muestral asociado a este experimento estaría formado por 2^{50} sucesos elementales, siendo cada uno de ellos un vector de ceros y unos con 50 componentes. Evidentemente hay que reducir el problema de forma que sea tratable y se capture la información que nos interesa. En este ejemplo, si anotamos el número de personas que poseen ADSL de las 50 encuestadas estaríamos recogiendo la información relevante. Este proceso es el que vamos a realizar con el concepto de variable aleatoria, pero más aún, la estructura probabilística que se ha introducido en el tema anterior al tratar con sucesos, va a poder trasladarse al conjunto de valores que tengamos como resumen del experimento aleatorio.

Así el **objetivo** en este tema va a ser introducir una herramienta para cuantificar los resultados de un experimento aleatorio. Para ello definimos una función del espacio muestral Ω en $\mathbb{R}$.

Definición 3.1 *Una* **variable aleatoria** X *es una función del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio* Ω *en* $\mathbb{R}$ *, es decir*

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \; .$$

Ejemplo 3.1 *Consideremos el experimento aleatorio de lanzar dos monedas. Definimos la variable aleatoria* X *: " número de caras obtenidas en los dos lanzamientos". En la siguiente tabla se recogen los sucesos elementales y los valores que les asociamos por la variable aleatoria* X*:*

w_i	$++$	$C+$	$+C$	CC
$X(w_i)$	*0*	*1*	*1*	*2*

En primer lugar, comenzaremos especificando el conjunto de valores que toma la variable aleatoria, a este conjunto lo denominaremos **rango de** X, y se denotará por $rg(X)$. En el Ejemplo 3.1 el rango de X es $rg(X) = \{0, 1, 2\}$.

Ejemplo 3.2 *Consideremos el experimento aleatorio de preguntar en 50 hogares de Sevilla elegidos al azar si poseen línea ADSL. Para la variable aleatoria* X *: " número de hogares con línea ADSL", el rango de* X *es:*

$$rg(X) = \{0, 1, 2, \dots, 50\} \; .$$

Ejemplo 3.3 *(Sobre un mismo espacio muestral* Ω *se pueden definir distintas variables aleatorias). Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado dos veces, podemos definir las siguientes variables aleatorias:*

1. X*: "suma de los puntos obtenidos en los dos lanzamientos", es decir* $X(i, j) = i+j$ *,* $\forall (i, j) \in \Omega$ *. El rango de* X *es* $rg(X) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ *.*
2. Y*: "diferencia en valor absoluto entre las puntuaciones obtenidas", es decir* $Y(i, j) = |i - j|$ *,* $\forall (i, j) \in \Omega$ *. El rango de* Y *es* $rg(Y) = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$ *.*

Básicamente podemos distinguir los siguientes **tipos de variables aleatorias:**

- Variable aleatoria **discreta**: toma un conjunto numerable de valores (puede ser finito o infinito numerable).
- Variable aleatoria **continua**: toma valores en un conjunto no numerable (lo más usual en un intervalo de $\mathbb{R}$).

Ejemplo 3.4 *Las variables aleatorias consideradas en los ejemplos anteriores son todas ellas discretas.*

Ejemplos de variables aleatorias continuas serían: peso de una persona, longitud de las piezas producidas por una máquina, tiempo de funcionamiento de un dispositivo electrónico,..

Proposición 3.1 *(Igualdad de variables aleatorias) Sean* X *e* Y *variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio muestral* Ω*. Entonces*

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \quad X(w) = Y(w) \; , \quad \forall w \in \Omega \; .$$

Proposición 3.2 *(Operaciones con variables aleatorias)*

Sean X e Y variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio muestral Ω. Teniendo en cuenta que son funciones se tienen las siguientes operaciones que a su vez nos proporcionan nuevas variables aleatorias:

- *Suma :* $(X+Y)(w) = X(w) + Y(w)\ , \quad \forall w \in \Omega\ .$
  Resta: $(X-Y)(w) = X(w) - Y(w)\ , \quad \forall w \in \Omega\ .$
- *Producto:* $(XY)(w) = X(w)Y(w)\ , \quad \forall w \in \Omega\ .$
- *Cociente:* $(X/Y)(w) = X(w)/Y(w)$ *, siempre que* $Y(w) \neq 0$*,* $\forall w \in \Omega$ *.*
- *Si X es una variable aleatoria definida en Ω, y g es una función real entonces $g(X)$ es también una variable aleatoria*

3.3 Variable aleatoria discreta

Definición 3.2 *Sea $X : \Omega \to R$ diremos que X es una* **variable aleatoria discreta** *si toma un conjunto numerable de valores, es decir $rg(X) = \{x_1 \ldots, x_n, ..\}$.*

Definición 3.3 *Para una variable aleatoria discreta X con $rg(X) = \{x_1 \ldots, x_n, ...\}$ se define la* **función de probabilidad** *(fdp) de X como*

$$P[X = x_i] = P[\{w \in \Omega \ \ tal \ \ que \ \ X(w) = x_i\}]\ , \qquad i \geq 1\ . \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.5 *En el Ejemplo 3.1 se definió la variable aleatoria X : número de caras obtenidas en dos lanzamientos de una moneda. La función de probabilidad de X es:*

x_i	*0*	*1*	*2*
$P[X = x_i]$	*1/4*	*1/2*	*1/4*

Teorema 3.1 *La* ***función de probabilidad*** *asociada a una variable aleatoria discreta X definida en (3.1) queda caracterizada por las siguientes* ***propiedades****:*

1. $P[X = x_i] > 0 \quad$ *si* $x_i \in rg(X)$ *.*
2. $\displaystyle\sum_{x_i \in rg(X)} P[X = x_i] = 1\ .$

Observamos que $P[X = x] = 0$ si x no pertenece a $rg(X) = \{x_1 \ldots, x_n, ..\}$.

Proposición 3.3 *(Cálculo de probabilidades)*
Sea $B \subseteq \mathbb{R}$. la probabilidad de que la variable aleatoria discreta X tome valores en B viene dada por

$$P[X \in B] = \sum_{x_i \in B} P[X = x_i]\ .$$

Ejemplo 3.6 *Para la v.a. definida en el Ejemplo 3.1 hallamos $P[X \in B]$ con $B = (-\infty, 1)$, $B = (0.5, 2)$, $B = (0.5, 2]$*

Solución:

- $P[X \in (-\infty, 1)] = P[X = 0] = 1/4$.
- $P[X \in (0.5, 2)] = P[X = 1] = 1/2$.
- $P[X \in (0.5, 2]] = P[X = 1] + P[X = 2] = 3/4$.

■

Definición 3.4 *Sea X una variable aleatoria discreta con $rg(X) = \{x_1, \ldots, x_n, ...\}$. Se define la* **Función de Distribución (FdD) de** X *como*

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i] \,, \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R} \,.$$

Observamos que $0 \leq F(x) \leq 1$ pues $F(x) = P[X \leq x] = P\,[X \in (-\infty, x]\,]$.

Ejemplo 3.7 *La variable aleatoria definida en el Ejemplo 3.1 tenía como función de probabilidad:*

x_i	*0*	*1*	*2*	
$P[X = x_i]$	*1/4*	*1/2*	*1/4*	*1*

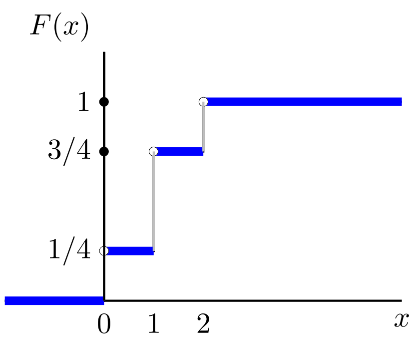
Por tanto

- $F(0) = P[X = 0] = 1/4$.
- $F(1) = P[X = 0] + P[X = 1] = 3/4$.
- $F(2) = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 1$.

Téngase en cuenta que la FdD se definió como $F(x) = P[X \leq x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de aquí que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \,, \\ 1/4, & \text{si } 0 \leq x < 1 \,, \\ 3/4, & \text{si } 1 \leq x < 2 \,, \\ 1, & \text{si } 2 \leq x \,. \end{cases}$$

La representamos gráficamente:



(Nótese la similitud con la curva acumulativa que se tenía para el caso discreto en Descriptiva).

Teorema 3.2 *La función de distribución (FdD) F de una variable aleatoria discreta verifica las siguientes propiedades:*

1. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
2. *F es no decreciente: es decir si* $x < y \quad \Rightarrow \quad F(x) \leq F(y)$.
3. *F es continua por la derecha: es decir, para todo* $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \lim_{h \to 0^+} F(x+h)$.

Además *observamos que,* **si X es una variable aleatoria discreta** *su FdD es una función escalonada, los puntos en que se producen las discontinuidades de salto son los valores que toma la variable aleatoria, x_i, y la medida del salto es igual a $P[X = x_i]$, es decir*

$$P[X = x_i] = F(x_i) - F(x_i^-) \ ,$$

donde por $F(x_i^-)$ se ha denotado el valor de la FdD a la izquierda de x_i.

Corolario 3.1 *Las siguientes probabilidades se pueden calcular de forma inmediata en términos de la FdD:*

1. $P[a < X \leq b] = P[X \leq b] - P[X \leq a] = F(b) - F(a)$
2. $P[X > a] = 1 - P[X \leq a] = 1 - F(a)$

3.4 Variable aleatoria continua

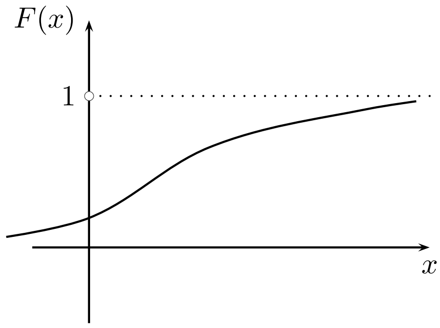
Una variable aleatoria continua es aquella que toma valores en un conjunto no numerable, que será generalmente un intervalo de $\mathbb{R}$. A continuación definimos este concepto un poco más formalmente a partir de la Función de Distribución.

Definición 3.5 *Consideremos la Función de Distribución, (FdD), de una variable aleatoria definida como*

$$F(x) = P[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Diremos que una **variable aleatoria** *es* **continua** *si su FdD es una función continua, y derivable en casi todos los puntos.*

Un ejemplo de gráfico que correspondería a la función de distribución de una variable aleatoria continua sería el siguiente:



Proposición 3.4 *Propiedades de la FdD de una variable aleatoria continua:*

1. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
2. F *es no decreciente.*
3. F *es* **continua**.

Nota 3.1 *Obsérvese que la FdD de una variable aleatoria continua verifica las mismas propiedades que vimos para variables aleatorias discretas, sólo que además es continua. Esta propiedad es la que distingue a variables aleatorias discretas y continuas, para variables discretas la FdD era sólo continua por la derecha.*

Corolario 3.2 *Si X es una variable aleatoria continua, entonces*

$$P\left[X = x\right] = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \ . \tag{3.2}$$

Demostración:

Sea $h > 0$ y consideremos,

$$P[x - h < X \leq x] = F(x) - F(x - h) \ .$$

Si $h \to 0$,

$$P[X = x] = F(x) - \lim_{h \to 0} F(x - h) = 0 \ ,$$

pues al ser F continua, $\lim_{h \to 0} F(x - h) = F(x)$.

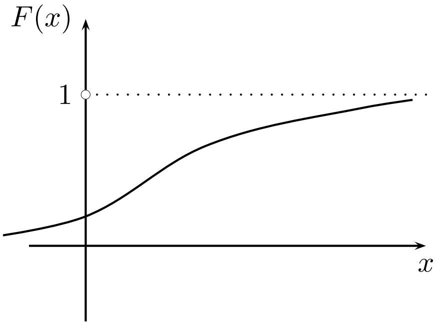
■

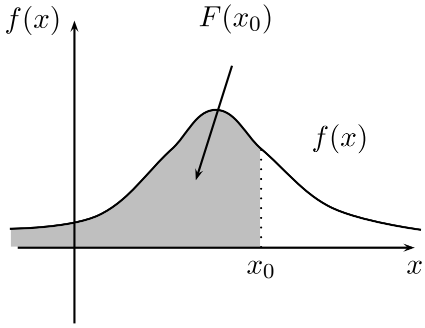
Para trabajar con variables aleatorias continuas introducimos una herramienta denominada función de densidad, que nos permite calcular la probabilidad de cualquier subintervalo contenido en el rango de valores de la variable aleatoria.

Definición 3.6 *Dada X una variable aleatoria continua, existe una función no negativa, $f(x)$, a la que se denomina* **función de densidad (fdd)** *de modo que*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \ . \tag{3.3}$$

Obsérvese que (3.3) nos dice que el área encerrada por la función de densidad hasta un punto x_0, coincide con el valor de la FdD en dicho punto, $F(x_0)$.





Proposición 3.5 *Las siguientes* **propiedades** *caracterizan* **la función de densidad***:*

(a) $f(x) \geq 0, \quad \forall x.$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Proposición 3.6 *(Cálculo de probabilidades en el caso continuo)*

1. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$, *con* $a < b$ *se verifica*

$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2. *En general dado* B *un subconjunto de* $\mathbb{R}$*,*

$$P[X \in B] = \int_B f(t)\,dt .$$

Nota 3.2 *Obsérvese que, a groso modo, podríamos decir que del caso discreto al continuo hemos cambiado* $\sum$ *por* $\int$*, fdp por fdd.*

Teorema 3.3 *En los puntos donde la función de distribución,* F *sea derivable, se verifica*

$$F'(x) = f(x).$$

Nota 3.3 *Hemos visto que si* X *es una variable aleatoria continua, entonces* $P[X = x] = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$*. Como consecuencias observar que*

(a) $P[a < X < b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X \leq b] = P[a \leq X < b]$.

(b) $P[X > x] = P[X \geq x]$.

Pues estos conjuntos sólo difieren en un punto.

En resumen, hemos visto que una variable aleatoria continua queda caracterizada por su fdd y su FdD. Conocer una de ellas, nos permite conocer la otra gracias a las dos relaciones siguientes:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
- $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo 3.8 *Sea* X *una variable aleatoria con FdD*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 . \end{cases}$$

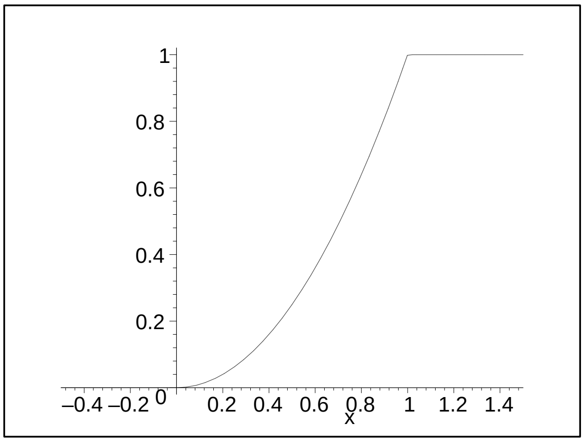
(a) Representar gráficamente $F(x)$*. ¿De qué tipo es la v.a.?*

(b) Hallar la función de densidad o la función de probabilidad según convenga.

(c) Calcular $P[0.5 \leq X \leq 0.7]$.

Solución:

(a) El gráfico de $F(x)$ es:



Observamos que $F(x)$ es una función continua, por tanto X es una variable aleatoria continua.

(b) La función de densidad es: $f(x) = F'(x)$.

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 1 \, . \end{cases} = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en caso contrario (c.c.)} \end{cases}$$

(c) Por ser una variable aleatoria continua

$$P[0.5 \leq X \leq 0.7] = P[0.5 < X \leq 0.7] \; .$$

Por tanto

$$P[0.5 \leq X \leq 0.7] = P[0.5 < X \leq 0.7] = F(0.7) - F(0.5) = (0.7)^2 - (0.5)^2 = 0.24 \; .$$

■

Ejemplo 3.9 *Supongamos que el tiempo de funcionamiento de un dispositivo electrónico (en horas) puede modelarse por una variable aleatoria* X *continua con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/2}, & \textit{si } x > 0 \; . \\ 0, & \textit{en caso contrario (c.c.)} \; . \end{cases}$$

Hallar:

(a) k.

(b) La FdD.

(c) La probabilidad de que el dispositivo funcione más de dos horas.

(d) La probabilidad de que el dispositivo funcione más de 6 horas si se sabe que lleva funcionado más de 2.

Solución:

(a) Nos basamos en que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \ .$$

Así

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} ke^{-x/2}dx =$$

$$= k\left[-2e^{-x/2}\right]_{x=0}^{x=\infty} = k\left(-2\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}+2\right) \ .$$

Puesto que $\lim_{x\to\infty} e^{-x/2} = 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = k \times 2 = 1 \ ,$$

y por tanto $k = 1/2$.

(b)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & si\ x \leq 0 \\ \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}e^{-t/2}dt = \left[-e^{-t/2}\right]_{t=0}^{t=x} = 1 - e^{-x/2}, & si\ x > 0 \ . \end{cases}$$

(c) $P[$*"el dispositivo funciones más de 2 horas"*$\,] =$

$$P[X > 2] = 1 - F(2) = 1 - \left\{1 - e^{-2/2}\right\} = e^{-2/2} = e^{-1} = 0.368 \ .$$

(d) $P[$*"el dispositivo funcione más de 6 horas si se sabe que lleva funcionado más de 2"*$\,] =$

$$= P[X > 6 \mid X > 2] = \frac{P[X > 6 \bigcap X > 2]}{P[X > 2]} =$$

$$= \frac{P[X > 6]}{P[X > 2]} = \frac{e^{-6/2}}{e^{-2/2}} = e^{-4/2} = e^{-2} = 0.135 \ .$$

3.5 Características asociadas a una variable aleatoria

Definición 3.7 *Se define la esperanza matemática,* **media o valor esperado** *de una variable aleatoria X como*

$$\mu = E\left[X\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in rg(X)} x_i\ P\left[X = x_i\right], & si\ X\ es\ discreta \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, & si\ X\ es\ continua \end{cases} \tag{3.4}$$

Nota 3.4 *La definición dada en (3.4) tiene sentido supuesto que la correspondiente suma o integral converge, en caso contrario, (es decir si $E[X] = +\infty$), se dice que no existe $E[X]$. Este comentario seguirá siendo válido siempre que se utilice el operador esperanza aunque no se indique explícitamente.*

Nota 3.5 *La media o valor esperado de una variable aleatoria tiene la misma interpretación que en distribuciones de frecuencias.*

Ejemplo 3.10 *(Caso discreto) Para la variable aleatoria definida en el Ejemplo 3.1 calculamos el valor esperado de X:*

$$E[X] = \sum_{x_i \in rg(X)} x_i \; P[X = x_i] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

Ejemplo 3.11 *(Caso continuo) Para la variable aleatoria definida en el Ejemplo 3.9 calculamos el valor esperado de X:*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = [por\ partes] =$$

$$= -xe^{-x/2}\Big]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x/2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x/2} dx = 2\ ,$$

(téngase en cuenta que $\lim_{x \to \infty} xe^{-x/2} = 0$).

Interpretación: "el tiempo medio o esperado de funcionamiento del dispositivo es de dos horas".

Definición 3.8 *Si X es una variable aleatoria y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función real se define*

$$E[g(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in rg(X)} g(x_i) \; P[X = x_i]\,, & si\ X\ es\ discreta \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, & si\ X\ es\ continua \end{cases} \tag{3.5}$$

El operador esperanza, que se ha introducido en esta sección, tiene muchas propiedades que pueden deducirse fácilmente a partir de las propiedades de las sumas en el caso discreto y de las integrales en el caso continuo. En el siguiente teorema recogemos algunas de ellas que nos serán de gran utilidad en este curso.

Teorema 3.4 *Propiedades de la esperanza:*

1. *$E[c] = c$, con $c \in \mathbb{R}$.*
2. *Linealidad de la esperanza*

$$E[aX + b] = aE[X] + b\ , \qquad con\ a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Demostración:

1. En este caso se tiene una variable aleatoria que sólo toma un valor, c, con probabilidad uno:

$$X = c \qquad \text{con} \qquad P[X = c] = 1\ .$$

Por tanto $E[c] = E[X] = c \times P[X = c] = c \times 1 = c$.

2. Hacemos la demostración para el caso discreto:

$$\begin{aligned}
E[aX+b] &= \{\text{por } (3.5)\} = \sum_{x_i \in rg(X)} (ax_i + b)\, P[X = x_i] \\
&= \underbrace{a\left(\sum_{x_i \in rg(X)} x_i P[X = x_i]\right)}_{=E[X]} + \underbrace{b\left(\sum_{x_i \in rg(X)} P[X = x_i]\right)}_{=1} \\
&= aE[X] + b\,.
\end{aligned}$$

Se propone hacer como ejercicio la demostración de este resultado para el caso continuo.

■

Teorema 3.5 *Otras propiedades de la esperanza:*

1. $E[cg(X)] = cE[g(X)], \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$.
2. $E[c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)] = c_1 E[g_1(X)] + c_2 E[g_2(X)], \ \text{con} \quad c_i \in \mathbb{R},\ c_i = 1, 2\ .$
3. *Si* $g_1(x) \leq g_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *entonces* $E[g_1(X)] \leq E[g_2(X)]$.

Demostración:

Las demostraciones son sencillas. Como ilustración se recoge la de 2. en el caso discreto

$$\begin{aligned}
E[c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)] &= \sum_{x_i} (c_1 g_1(x_i) + c_2 g_2(x_i))\, P[X = x_i] \\
&= c_1 \left(\sum_{x_i} g_1(x_i) P[X = x_i]\right) + c_2 \left(\sum_{x_i} g_2(x_i) P[X = x_i]\right) \\
&= c_1 E[g_1(X)] + c_2 E[g_2(X)]\ .
\end{aligned}$$

Se propone probar 3. en el caso discreto.

■

Definición 3.9 *(Momentos) Se define el momento (no centrado) de orden k de la variable aleatoria X como*

$$\alpha_k = E\left[X^k\right]\ , \qquad k \geq 0\ .$$

Se define el momento centrado de orden k de la variable aleatoria X como

$$\beta_k = E\left[(X - \mu)^k\right]\ , \qquad k \geq 0\ , \quad \mu = E[X]\ .$$

Obsérvese que la media es el momento (no centrado) de orden uno: $\alpha_1 = E[X]$. De los momentos centrados, el más importante es el de orden dos, β_2, más conocido como varianza, $Var[X]$, el cual pasamos a estudiar con detalle a continuación.

Definición 3.10 *Se define la* ***varianza*** *de una variable aleatoria X como*

$$\sigma^2 = Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] .$$

Proposición 3.7 *Propiedades de la varianza:*

1. $Var\,[X] \geq 0$.

2. $Var\,[X] = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} /\ P\,[X=a] = 1$.

   Se dice en este caso que X es una variable aleatoria degenerada.

3. $Var\,[a\,X + b] = a^2\,Var\,(X)$, *con $a, b \in \mathbb{R}$.*

4. *En la práctica suele ser útil la siguiente expresión para calcular la $Var[X]$,*

$$Var\,[X] = E\left[X^2\right] - \mu^2 = E\left[X^2\right] - (E[X])^2.$$

Demostración:

1. Se tiene de forma inmediata de la definición pues

$$Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in rg(X)} (x_i-\mu)^2\ P\,[X=x_i]\,, & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx, & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases} \tag{3.7}$$

(se ha denotado por $\mu = E[X]$).

3. $Var[aX+b] = \{\text{definición de varianza}\} = E\left[(aX+b-E[aX+b])^2\right] =$

$$= \{\text{puesto que } E[aX+b] = aE[X]+b = a\mu + b\} = E\left[a^2\,(X-\mu)^2\right] =$$

$$= \{\text{por Teorema 3.5, relación 1.}\} = a^2 E\left[(X-\mu)^2\right] = a^2 Var[X] .$$

Se propone la demostración de las otras propiedades como ejercicio.

■

La **varianza** es una **medida de la dispersión** de una variable aleatoria en torno a su media. Al interpretarla presenta el problema que las unidades en que viene medida son las de la variable original al cuadrado. Para solucionar este inconveniente se introduce la desviación típica, cuya interpretación como medida de dispersión nos puede parecer más sencilla porque viene expresada en las mismas unidades de medida que la variable original.

Definición 3.11 *Se define la* **desviación típica** *de una variable aleatoria X como*

$$\sigma = +\sqrt{Var[X]}.$$

La **media** de una variable aleatoria es la **medida de centralización** más usada en la práctica. **Otras medidas de centralización** interesantes son la moda y mediana.

Definición 3.12 *Dada X una variable aleatoria se define la* **moda** *como aquel valor de la variable que tiene mayor probabilidad en el caso discreto, y como aquel valor en que la función de densidad alcanza un máximo en el caso continuo. (No tiene por qué ser única).*

Definición 3.13 *Dada X una variable aleatoria discreta se define la* **mediana** *como aquel valor de la variable aleatoria en que la función de distribución vale $1/2$.*

Nota 3.6 *Para el cálculo de la mediana en el caso discreto se presenta la misma casuística que se tenía en el caso discreto de Descriptiva.*

Ejemplo 3.12 *En el Ejemplo 3.1 calculamos las medidas que se han introducido en este apartado:*

- $\left(E[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1\right)$.
- $E[X^2] = \sum_{x_i \in rg(X)} x_i^2 P[X = x_i] = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = 3/2$
- $\sigma^2 = Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = 1/2$
- $\sigma = \sqrt{1/2}$
- *moda*$= 1$ *porque es el valor más probable.*
- *mediana*$= 1$ *(ver el gráfico de la FdD correspondiente a este ejemplo y téngase en cuenta la Nota 3.6.)*

Ejemplo 3.13 *(Esperanza y varianza de $Y = aX + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.)*

Sea X : número de hijos por familia en una cierta ciudad.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P[X = x_i]$	0.47	0.30	0.10	0.06	0.04	0.02	0.01

(a) Hallar la media o esperanza de X. ¿Qué significa?

(b) Varianza y desviación típica de X.

(c) El Ayuntamiento concede una ayuda anual a las familias de 2000 euros por hijo. Hallar la media, varianza y desviación típica de la variable aleatoria Y :"ayuda (en euros) que recibe anualmente cada familia".

Solución:

(a)

$$E[X] = \sum_{i=1}^{7} x_i P[X = x_i] = 0 \times 0.47 + 1 \times 0.30 + \ldots + 6 \times 0.01 = 1$$

Si tomamos al azar una familia de la población, el número medio o esperado de hijos es uno.

(b)

$$\sigma_X^2 = Var[X] = 1.74$$
$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{1.74} = 1.32 \ .$$

(c) La variable aleatoria Y *: " ayuda (en euros) que recibe anualmente cada familia" viene dada por* $Y = 2000X$*. Por tanto*

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E[2000 \times X] = 2000 \times E[X] = 2000 \\
\sigma_Y^2 &= Var[Y] = Var[2000 \times X] = (2000)^2 \times Var[X] = 6.96 \times 10^6 \\
\sigma_Y &= \sqrt{Var[Y]} = |2000|\sqrt{Var[X]} = 2000 \times 1.32 = 2638 \,.
\end{aligned}$$

Obsérvese que σ_Y *puede calcularse como* $\sigma_Y = \sqrt{Var[Y]}$ *o como* $\sigma_Y = |a|\sigma_X$.

Ejemplo 3.14 *Se propone calcular la varianza y desviación típica para la variable aleatoria continua considerada en el Ejemplo 3.8.*

3.6 Variables aleatorias bidimensionales

En esta sección se pretende dar una introducción al estudio de la distribuciones bidimensionales (y multidimensionales), por lo que sólo se recogen algunos aspectos relevantes de ellas. Puede profundizarse en las obras recogidas en la bibliografía, por ejemplo en D. Peña (2001).

Definición 3.14 *Sea* Ω *el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.* $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *es una* **variable aleatoria bidimensional***.*

Es decir, se tiene una variable aleatoria bidimensional cuando cuantificamos dos aspectos, X e Y, de un experimento aleatorio. A continuación se recogen algunos ejemplos de variables aleatorias bidimensionales.

Ejemplo 3.15

1. *Consideremos el experimento aleatorio de tirar dos dados. Sean* X *: suma de los puntos obtenidos,* Y *: diferencia en valor absoluto entre los puntos obtenidos.* (X, Y) *es una variable aleatoria bidimensional, en este caso las dos componentes son discretas.*

2. *Sobre un grupo de individuos medir,* X *: altura,* Y *: peso.* (X, Y) *es una variable aleatoria bidimensional, en este caso las dos componentes son continuas.*

3. *Sobre un grupo de individuos estudiar,* X *: sexo (0: hombre, 1: mujer),* Y *: peso.* (X, Y) *es una variable aleatoria bidimensional, en este caso la componente* X *es discreta e* Y *es continua.*

Obsérvese que podríamos decir que $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ es una variable aleatoria bidimensional si y sólo si X e Y son variables aleatorias unidimensionales.

A continuación destacamos los casos en que ambas componentes sean discretas o ambas sean continuas.

3.6.1 Variable aleatoria bidimensional discreta

Definición 3.15 *Sea* $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$. (X, Y) *es una variable aleatoria bidimensional discreta si y sólo si* X *e* Y *son variables aleatorias unidimensionales discretas.*

Una variable aleatoria bidimensional discreta queda caracterizada conociendo el conjunto de pares de valores que toma, $rg(X, Y) = \{(x_i, y_j)\}_{i,j}$, y su función de probabilidad conjunta definida de forma análoga al caso univariante:

$$P[X = x_i, Y = y_j] = P[\{w \in \Omega \ : \ (X(w) = x_i, Y(w) = y_j)\}] \ , \quad \forall (x_i, y_j) \in rg(X, Y) \ .$$

Proposición 3.8 *Las siguientes* **propiedades** *caracterizan la función de probabilidad conjunta:*

- $P[X = x_i, Y = y_j] \geq 0, \qquad \forall (x_i, y_j) \in rg(X, Y).$
- $\displaystyle\sum_{x_i} \sum_{y_j} P[X = x_i, Y = y_j] = 1$.

A partir de la función de probabilidad conjunta se pueden calcular probabilidades, obtener las distribuciones de cada componente (distribuciones marginales), y las características más relevantes.

Por ejemplo, la función de distribución (FdD) conjunta, F, sería una función $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ definida como

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{\{x_i \leq x, \ y_j \leq y\}} P[X = x_i, Y = y_j] \ , \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Definición 3.16 *Sea* (X, Y) *una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta* $\{P[X = x_i, Y = y_j]\}_{i,j}$.

La ***función de probabilidad marginal de X*** *viene dada por*

$$P[X = x_i] = \sum_{y_j \in rg(Y)} P[X = x_i, Y = y_j] \ . \tag{3.8}$$

La ***función de probabilidad marginal de Y*** *viene dada por*

$$P[Y = y_j] = \sum_{x_i \in rg(X)} P[X = x_i, Y = y_j] \ . \tag{3.9}$$

Ejemplo 3.16 *Se dispone de una caja con 3 piezas aptas y 2 defectuosas,* $U = \{3A \ , \ 2D\}$. *Se extraen 2 piezas sin reemplazamiento, y se definen las variables aleatorias:*

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{si la } 1^{\underline{a}} \textit{ pieza es apta} \\ 0, & \textit{si la } 1^{\underline{a}} \textit{ pieza es defectuosa} \ . \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \textit{si la } 2^{\underline{a}} \textit{ pieza es apta} \\ 0, & \textit{si la } 2^{\underline{a}} \textit{ pieza es defectuosa} \ . \end{cases}$$

1. *Hallar la función de probabilidad conjunta*
2. *Hallar las funciones de probabilidad marginales.*

Solución:

Para $i = 1, 2$, definamos los sucesos:

A_i : *"la i-ésima pieza extraída es apta"*, D_i : *"la i-ésima pieza extraída es defectuosa".*

- El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es:

$$\Omega \ = \ \{ \ A_1 \cap A_2, \ A_1 \cap D_2, \ D_1 \cap A_2, \ D_1 \cap D_2 \ \} \quad .$$

1. La función de probabilidad conjunta de (X, Y) viene dada por:

$$\begin{aligned} P[X=0, Y=0] &= P[D_1 \cap D_2] = P[D_1]P[D_2|D_1] = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} \\ P[X=0, Y=1] &= P[D_1 \cap A_2] = P[D_1]P[A_2|D_1] = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} \\ P[X=1, Y=0] &= P[A_1 \cap D_2] = P[A_1]P[D_2|A_1] = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} \\ P[X=1, Y=1] &= P[A_1 \cap A_2] = P[A_1]P[A_2|A_1] = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} \end{aligned}$$

Se suele recoger en una tabla de doble entrada:

$X \setminus Y$	0	1	$P[X = x_i]$
0	2/20	6/20	8/20
1	6/20	6/20	12/20
$P[Y = y_j]$	8/20	12/20	1

2. Distribuciones marginales:

La función de probabilidad marginal de X viene dada por

$$P[X = x_i] = \sum_{y_j} P[X = x_i, Y = y_j] \ .$$

La función de probabilidad marginal de Y viene dada por

$$P[Y = y_j] = \sum_{x_i} P[X = x_i, Y = y_j] \ .$$

Ambas se han recogido en la anterior tabla de doble entrada.

■

Definición 3.17 *Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta $\{P[X = x_i, Y = y_j]\}$. Si $P[Y = y_j] > 0$ se define la* ***función de probabilidad de X condicionada a*** *$Y = y_j$, $X|Y = y_j$, como*

$$P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{P[X = x_i, Y = y_j]}{P[Y = y_j]} \ . \tag{3.10}$$

Recuérdese que dados dos sucesos A, B, si $P[B] > 0$,

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \ .$$

En (3.10) se ha considerado

$A = \{X = x_i\} = \{X = x_i,\ Y \in \mathbb{R}\}$,

$B = \{Y = y_j\} = \{X \in \mathbb{R},\ Y = y_j\}$,

por lo que $A \cap B = \{X = x_i,\ Y = y_j\}$.

Se puede comprobar que para y_j fijo, (3.10) define una función de probabilidad.

De forma análoga se definiría la función de probabilidad de Y condicionada a $X = x_i$ con x_i fijo (supuesto que $P[X = x_i] > 0$).

3.6.2 Variable aleatoria bidimensional continua.

En este apartado se define y estudian algunas propiedades de las variables aleatorias bidimensionales continuas a partir de la función de densidad conjunta.

Definición 3.18 *Sea* $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$. (X, Y) *es una variable aleatoria bidimensional continua si y sólo si* X *e* Y *son variables aleatorias unidimensionales continuas.*

Una variable aleatoria bidimensional continua queda caracterizada conociendo el conjunto de $\mathbb{R}^2$ en que toma valores y su **función de densidad conjunta**, $f(x, y)$, la cuál verifica **propiedades** análogas al caso univariante:

- $f(x, y) \geq 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$.

A partir de la función de densidad conjunta se pueden calcular probabilidades, obtener las distribuciones de cada componente (distribuciones marginales), y las características más relevantes.

Así, la **función de distribución conjunta** (FdD) conjunta sería una función $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ definida como

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s, t)dsdt \ , \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Definición 3.19 *Dada* $f(x, y)$ *la fdd conjunta de una variable aleatoria bidimensional continua* (X, Y)*:*

*La **función de densidad marginal de*** X *viene dada por*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \ .$$

*La **función de densidad marginal de*** Y *viene dada por*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \ .$$

Definición 3.20 *Sean $f(x,y)$, la fdd conjunta de una variable aleatoria bidimensional continua (X,Y), y $f_Y(y)$ la fdd marginal de Y. En todo punto (x,y) en que f es continua y $f_Y(y)>0$, la* ***función de densidad de X condicionada a $Y=y$*** *existe y viene dada por*

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \ .$$

Nota 3.7 *Puede comprobarse que $f_{X|Y=y}(\cdot)$ es una función de densidad.*

3.6.3 Características de variables aleatorias bidimensionales.

En esta sección destacamos cómo calcular $E[g(X,Y)]$ siendo $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición 3.21 *(Cálculo de $E[g(X,Y)]$)*

Caso discreto:

$$E[g(X,Y)] = \sum_{x_i}\sum_{y_j} g(x_i,y_j)P[X=x_i \ , \ Y=y_j] \ .$$

Caso continuo:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy \ .$$

Aplicamos las expresiones anteriores al cálculo de $E[XY]$ en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.17 *La $E[XY]$ para la variable aleatoria del Ejemplo 3.16 es:*

$$E[XY] = \sum_{x_i}\sum_{y_j} x_i y_j P[X=x_i \ , \ Y=y_j] = \frac{6}{20} = 0.3 \ ,$$

(se está considerando $g(x,y)=xy$).

Proposición 3.9

(a) $E[X+Y] = E[X]+E[Y]$.

(b) $E[X-Y] = E[X]-E[Y]$.

Demostración:

(a). La hacemos en el caso discreto (se está considerando $g(x,y)=x+y$):

$$\begin{aligned}
E[X+Y] &= \sum_{x_i}\sum_{y_j}(x_i+y_j)P[X=x_i \ , \ Y=y_j] \\
&= \sum_{x_i} x_i \left(\sum_{y_j} P[X=x_i \ , \ Y=y_j]\right) + \sum_{y_j} y_j \left(\sum_{x_i} P[X=x_i \ , \ Y=y_j]\right) \\
&= \sum_{x_i} x_i P[X=x_i] + \sum_{y_j} y_j P[Y=y_j] \\
&= E[X]+E[Y] \ .
\end{aligned}$$

En el caso continuo sería similar, sólo que utilizando notación integral.

(b) Análoga a la anterior.

■

Definición 3.22 *La* ***covarianza de*** (X, Y) *se define como*

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \ .$$

La siguiente expresión equivalente de la covarianza simplifica su cálculo en las aplicaciones prácticas.

Proposición 3.10

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] \ .$$

Demostración:

Propuesta como ejercicio

■

Ejemplo 3.18 *Calculemos la* $Cov[X, Y]$ *para la variable aleatoria del Ejemplo 3.16. Utilizamos para ello*

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_{x_i} \sum_{y_j} x_i y_j P[X = x_i, Y = y_j] = 6/20 \ . \\ E[X] &= \sum_{x_i} x_i P[X = x_i] = 12/20 \ . \\ E[Y] &= \sum_{y_j} y_j P[Y = y_j] = 12/20 \ . \end{aligned}$$

Por tanto

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = -3/50 \ .$$

(El signo negativo de la covarianza nos indica que la relación entre las variables es inversa: al aumentar una variable la otra disminuye).

Proposición 3.11 *(Varianza de la suma y diferencia de variables aleatorias)*

(a) $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X, Y]$

(b) $Var[X - Y] = Var[X] + Var[Y] - 2Cov[X, Y]$

Demostración:

(a) Utilizaremos que $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$, y denotaremos por $\mu_X = E[X]$, $\mu_Y = E[Y]$.

$$Var[X + Y] = E\left[(X + Y - E[X + Y])^2\right] = E\left[((X - \mu_X) + (Y - \mu_Y))^2\right] =$$

$$= E\left[(X - \mu_X)^2 + (Y - \mu_Y)^2 + 2(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right] = \{\text{linealidad de la esperanza}\} =$$

$$= E[(X - \mu_X)^2] + E[(Y - \mu_Y)^2] + 2E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X, Y]$$

(b) Similar a la anterior.

■

Ejercicio 3.1 *Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Demostrar que*

$$Cov[aX + b,\ cY + d] \ = \ ac\, Cov[X, Y]\ , \quad a, b, c, d, \in \mathbb{R}\ .$$

Definición 3.23 *Coeficiente de correlación lineal*

$$\rho = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}\ .$$

El coeficiente de correlación lineal es una medida de la relación lineal entre dos variables (su interpretación es análoga a la que se vio en Descriptiva). Obsérvese que signo(ρ)=signo($Cov[X, Y]$).

Definición 3.24 *X e Y son variables aleatorias* **incorreladas** *si y sólo si $Cov[X, Y] = 0$. (Equivalentemente $\rho_{X,Y} = 0$).*

Ejemplo 3.19 *Consideremos la variable aleatoria bidimensional (X, Y) con Y : el tiempo de espera en cola y X : el tiempo total que un cliente permanece en una oficina bancaria, ambos en minutos, (X es el tiempo de espera en cola más el tiempo que se invierte en atender al individuo). De estas variables se conocen las siguientes características:*

marginal de X	***marginal de Y***
$E[X] = 12$ $Var[X] = 72$	$E[Y] = 6$ $Var[Y] = 36$

$$Cov[X, Y] = 36\ .$$

Consideremos la variable aleatoria $T = X - Y$, el tiempo que se tarda en atender a un cliente. Gracias a las Proposiciones 3.9 y 3.11 podemos calcular:

$$\begin{aligned} E[T] = E[X - Y] &= E[X] - E[Y] = 6 \\ Var[T] = Var[X - Y] &= Var[X] + Var[Y] - 2Cov[X, Y] = 72 + 36 - (2 \times 36) = 36\ . \end{aligned}$$

3.7 Independencia

Hemos visto que a partir de la distribución conjunta se puede hallar la distribución de cada componente (éstas eran las distribuciones marginales). Cabe preguntarse si a partir de la distribuciones marginales es posible determinar la distribución conjunta. En general esto no es cierto, sólo en el caso particular en que las variables sean independientes. En esta sección estudiamos este caso particular comenzando con el caso bivariante.

Definición 3.25 *Dadas dos variables X e Y son* **independientes** *si y sólo si*

- *Caso discreto:*

$$P[X = x_i\ ,\ Y = y_j] \ = \ P[X = x_i] \times P[Y = y_j]\ , \qquad \forall (x_i, y_j) \in rg(X, Y)\ .$$

- *Caso continuo:*

$$f(x, y) \ = \ f_X(x) \times f_Y(y)\ , \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,$$

  con f la función de densidad conjunta de (X, Y), f_X y f_Y las funciones de densidad marginales de X e Y respectivamente.

Proposición 3.12 *La definición de independencia dada es equivalente a que para cualesquiera conjuntos $B_1,\ B_2\ \subseteq \mathbb{R}$*

$$P[X \in B_1\ ,\ Y \in B_2]\ =\ P[X \in B_1]\ \times P[Y \in B_2]\ .$$

Nota 3.8 *Destacamos que en el caso particular en que las variables sean independientes es posible calcular la función de probabilidad (ó fdd) conjunta a partir de las marginales. Esto en general no es posible.*

Proposición 3.13 *(Propiedades de variables independientes)*

- *Si X e Y son independientes entonces $E[XY] = E[X] \times E[Y]$, es decir $Cov[X,Y] = 0$.*
- *Si X e Y son independientes entonces $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.*

Ejemplo 3.20 *Consideremos la variable aleatoria bidimensional definida en el Ejemplo 3.16, las variables aleatorias X e Y no son independientes.*

Podríamos justificarlo porque no se verifica que

$$P[X = x_i, Y = y_j] = P[X = x_i] \times P[Y = y_j], \quad \textit{para todo}\ (x_i, y_j)\ .$$

Por ejemplo observar que $P[X = 0, Y = 0] \neq P[X = 0]P[Y = 0]$

También podría justificarse porque al ser $Cov[X,Y] \neq 0$ entonces las variables aleatorias no pueden ser independientes (véase la Proposición 3.13).

Ejemplo 3.21 *Repetir los cálculos realizados con las variables aleatorias definidas en el Ejemplo 3.16 si las extracciones se realizan con reemplazamiento.*

Solución:

Damos sólo algunos resultados como indicaciones.

La función de probabilidad conjunta es:

$X \setminus Y$	0	1	$P[X = x_i]$
0	4/25	6/25	10/25
1	6/25	9/25	15/25
$P[Y = y_j]$	10/25	15/25	1

Las variables aleatorias X e Y son independientes, puesto que

$$P[X = x_i, Y = y_j] = P[X = x_i] \times P[Y = y_j], \quad \textit{para todo}\ (x_i, y_j)\ .$$

Por tanto $Cov[X,Y] = 0$ (Proposición 3.13).

■

Los resultados anteriores se pueden **generalizar a n variables independientes** como se indica a continuación.

Definición 3.26

Caso discreto: $X_1, \ldots, X_n$ *son independientes si y sólo si*

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = P[X_1 = x_1] \times \ldots \times P[X_n = x_n] \ , \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in rg(X_1, \ldots, X_n) \ .$$

Caso continuo: $X_1, \ldots, X_n$ *son independientes si y sólo si*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \times \ldots \times f_{X_n}(x_n) \ , \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

siendo f *la función de densidad conjunta del vector* $(X_1, \ldots, X_n)$*, y* f_{X_i} *las funciones de densidad marginales de* X_i *para* $i = 1, \ldots, n$ *.*

Proposición 3.14 *(Propiedades de* n *variables independientes.) Si* $X_1, \ldots, X_n$ *son variables aleatorias independientes entonces*

- *Para cualesquiera conjuntos* $B_1,\ B_2,\ \ldots, B_n\ \subseteq \mathbb{R}$

$$P[X_1 \in B_1 \ ,\ X_2 \in B_2 \ ,\ \ldots X_n \in B_n \ ] \ = \ P[X_1 \in B_1] \ \times P[X_2 \in B_2] \ \times \ldots \times P[X_n \in B_n] \ .$$

- $Var[X_1 + \ldots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] \ .$

Para finalizar recogemos algunos ejemplos en los que se pretende destacar la aplicabilidad de los resultados recogidos en esta sección.

Ejemplo 3.22 *Tres baterías tienen probabilidad de hacer blanco* $p_1 = 0.2 \ , p_2 = 0.3 \ , p_3 = 0.4$ *, respectivamente. Encontrar la probabilidad de que se obtengan 3 blancos al disparar las tres baterías.*

Solución:

Para $i = 1, 2, 3$ podemos definir las siguientes variables aleatorias que nos indican si se hace blanco o no al disparar cada batería

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{si la batería i hace blanco} \\ 0, & \text{si falla .} \end{cases}$$

La función de probabilidad de I_i es

$$P[I_i = 1] = p_i, \qquad P[I_i = 0] = 1 - p_i \ .$$

Podemos suponer que las variables aleatorias I_i son independientes (el resultado de cada disparo no influye en el resultado que se obtenga al disparar las restantes baterías), y por tanto calcular

$$P[\text{"obtener 3 blancos al disparar las tres baterías"}] = P[I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 1] = \{I_i \text{ independientes}\} =$$

$$= P[I_1 = 1] \times P[I_2 = 1] \times P[I_3 = 1] = 0.024 \ .$$

■

Ejemplo 3.23 *Se prueban tres elementos que trabajan independientemente entre sí. La duración del tiempo de funcionamiento (en horas) de cada elemento se distribuye según las siguientes funciones de distribución:*

para el primer elemento	$F_1(t) = 1 - e^{-0.1t}$	*para* $t > 0$
para el segundo	$F_2(t) = 1 - e^{-0.2t}$	*para* $t > 0$
para el tercer elemento	$F_3(t) = 1 - e^{-0.3t}$	*para* $t > 0$

Hallar la probabilidad de que en el intervalo de tiempo $(0, 5]$ *horas fallen los tres elementos.*

Solución:

Definamos las variables aleatorias T_i : "tiempo de funcionamiento del elemento i", para $i = 1, 2, 3$.

$$P[\text{"en el intervalo de tiempo } (0,5] \text{ fallen los tres elementos" }] =$$

$$= P[\ T_1 \leq 5,\ T_2 \leq 5,\ T_3 \leq 5\ ] = \{T_i \ \textbf{independientes}\} =$$

$$= P[T_1 \leq 5] \times P[T_2 \leq 5] \times P[T_2 \leq 5] = F_1(5) \times F_2(5) \times F_3(5)$$

$$= (1 - e^{-0.5}) \times (1 - e^{-1}) \times (1 - e^{-1.5}) = 0.3935 \times 0.6321 \times 0.7769 \ = \ 0.1932 \ .$$

■