Índice

1 Nociones fundamentales de Cálculo de Probabilidades **1.1**

1.1 Introducción. Experimentos aleatorios 1.1

1.1.1 Determinismo e incertidumbre 1.1

1.1.2 Experimentos aleatorios 1.2

1.2 Espacio muestral y sucesos 1.3

1.2.1 Espacio muestral 1.3

1.2.2 Sucesos 1.3

1.2.3 Operaciones con sucesos 1.4

1.2.4 Álgebra de sucesos 1.8

1.3 Definición de probabilidad 1.9

1.3.1 Introducción. Definición frecuentista de probabilidad 1.9

1.3.2 Definición axiomática de probabilidad 1.10

1.4 Probabilidad en espacios muestrales finitos. 1.13

1.4.1 Regla de Laplace. 1.16

1.5 Combinatoria 1.18

Tema 1

Nociones fundamentales de Cálculo de Probabilidades

1.1 Introducción. Experimentos aleatorios

La teoría de la probabilidad se desarrolló partiendo de la teoría matemática de los juegos de azar, desarrollada hace cerca de tres siglos. La probabilidad es un campo muy importante de las matemáticas y sus aplicaciones se extienden a otras ramas de las ciencias.

El objetivo de este tema es dar a conocer la teoría axiomática, tal y como se conoce hoy, iniciada por Kolmogorov en su trabajo *Foundations of the Theory of Probability* (Berlín, 1933). Se presentarán los sucesos aleatorios como conjuntos, y la probabilidad como una medida de la "incertidumbre" de estos conjuntos. En particular, presentaremos la conocida regla de Laplace, para obtener estas medidas de probabilidad.

1.1.1 Determinismo e incertidumbre

A cualquiera que preguntemos cuánto tiempo tardaríamos en recorrer los 200 kilómetros que separan Sevilla de Málaga, si nos desplazamos con velocidad constante de 100 kms/hora, nos contestará sin dudar que 2 horas. Su seguridad en responder se tornaría indecisión si ante una urna con bolas blancas, azules y rojas, en cantidades $b = 20$, $a = 30$ y $r = 50$, respectivamente, le preguntamos de qué color será la bola si efectuamos una extracción al azar. Cualquiera conoce la distinta naturaleza de ambos fenómenos.

- El primero pertenece a los que podemos denominar **deterministas**, aquellos en los que la relación causa-efecto aparece perfectamente determinada. En nuestro caso concreto, la conocida ecuación $e = v \times t$ describe dicha relación. "Si en un ordenador encendido se estropea el único ventilador que tiene, la temperatura del procesador subirá", este es otro claro ejemplo de fenómeno determinístico.

- El segundo pertenece a la categoría de los que denominamos **aleatorios**, y se caracteriza por que, aun repitiendo en las mismas condiciones la extracción de la bola, el resultado variará de unas ocasiones a otras.

La única forma de abordar con rigor el problema que la incertidumbre de los fenómenos aleatorios comporta es tratar de medirla. La pregunta que surge es, ¿cómo medir la incertidumbre? De las posibles respuestas, sólo una nos parece correcta: mediante la probabilidad.

Nuestro principal objetivo es desarrollar el arte de describir la incertidumbre en términos de modelos probabilísticos, y el uso del razonamiento probabilístico. En primer lugar describiremos la estructura genérica de tales modelos, y sus propiedades básicas.

El **objetivo del Cálculo de Probabilidades** es formalizar de un modo matemático el concepto de probabilidad con el objeto de **medir o cuantificar el grado de incertidumbre** que se presenta en numerosas situaciones.

1.1.2 Experimentos aleatorios

Se llama **experimento** o **prueba** a cualquier proceso que genera un resultado. Un experimento que sólo puede tomar un **único** resultado se le denomina determinístico. Pero existen experimentos en los cuales el resultado es impredecible con antelación a la realización del mismo, a los que denominaremos experimentos aleatorios.

Ejemplo 1.1 *Ejemplos de experimentos aleatorios:*

- $\xi_1 =$ *"lanzamiento de un dado",*
- $\xi_2 =$ *"lanzamiento de tres monedas",*
- $\xi_3 =$ *"lanzamiento de monedas hasta que salga la primera cara",*
- $\xi_4 =$ *"número de llamadas telefónicas que recibe la centralita de este edificio en una mañana",*
- $\xi_5 =$ *"distancia que recorre una marca de coche en una pista de pruebas con 5 litros de gasolina",*
- $\xi_6 =$ *"tiempo de vida de un procesador",*
- $\xi_7 =$ *"tiempo de espera para la ejecución de un programa en un ordenador".*

A pesar de que en estos experimentos el resultado no está totalmente determinado, sí que podemos tener un grado de certidumbre sobre el mismo.

Si lanzamos una moneda, es tan "probable" que el resultado sea cara como que sea cruz, si compro un cupón de la ONCE, es más probable que no me toque, a que sí me toque, que el tiempo de vida de un procesador dure más de un año es más probable que el hecho de que dure más de cinco años.

Definición 1.1 *Un experimento ξ (se lee xi) se dice **aleatorio** (frente a experimento determinístico) si verifica las siguientes condiciones:*

i) Se conocen previamente todos los posibles resultados asociados al experimento.

ii) No se puede conocer el resultado del mismo antes de realizarlo.

iii) Se puede repetir bajo las mismas condiciones iniciales.

No hay restricción sobre qué constituye un experimento. Por ejemplo, podría ser una única tirada de una moneda, o tres tiradas, o una secuencia infinita de tiradas. Sin embargo, es importante observar que en nuestra formulación de un modelo probabilístico, hay un solo experimento. Así que tres tiradas de una moneda constituyen un único experimento, más que tres experimentos.

1.2 Espacio muestral y sucesos

1.2.1 Espacio muestral

Definición 1.2 *El* ***espacio muestral*** Ω *(se lee omega)* ***asociado a un experimento*** ξ *es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.*

Los espacios muestrales se **clasifican** según el número de elementos en:

- **Finito**.
- **Infinito numerable**.

  Estos dos se engloban en los llamados espacios muestrales **Discretos**.
- **Infinito no numerable o Continuo**. Estos surgen en la práctica cuando se estudian propiedades que se miden con una escala continua, es decir, propiedades como la temperatura, velocidad, longitud, tiempo.

Ejemplo 1.2 *Algunos ejemplos de espacios muestrales son:*

- ξ_a = *lanzamiento de una moneda,* $\Omega_a = \{C, +\}$ *(finito).*
- ξ_b = *lanzamiento de un dado,* $\Omega_b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *(finito).*
- ξ_c = *lanzamiento de una moneda y dado,* $\Omega_c = \{C1, C2, C3, \ldots, +5, +6\}$ *(finito).*
- ξ_d = *extraer una carta de la baraja,* $\Omega_d = \{1B, 2B, \ldots, 7B, 10B, 11B, 12B, \ldots, 12C\}$ *(finito).*
- ξ_e = *el número de libros leídos por una persona elegida al azar,* $\Omega_e = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ *(Infinito Numerable).*
- ξ_f = *el número de accidentes de coche durante un día,* $\Omega_f = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *(Infinito Numerable).*
- ξ_g = *el tiempo que está en un hospital tras una operación,* $\Omega_g = \{t > 0\} = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$ *(Continuo)*
- ξ_h = *el tiempo de funcionamiento de una lámpara,* $\Omega_h = \mathbb{R}^+$ *(Continuo).*

1.2.2 Sucesos

Definición 1.3 *Un* ***suceso*** A *asociado a un experimento* ξ *y a un espacio muestral* Ω*, es cualquier subconjunto del espacio muestral* Ω*. Los representaremos con letras mayúsculas.*

Un suceso es ***elemental*** *si consta de un solo elemento* $\{w\}$*.*

Ejemplo 1.3 *Con los siguientes experimentos aleatorios, damos ejemplos de sucesos:*

- ξ_1 = *"lanzamiento de un dado".* $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. Algunos sucesos asociados:* A_1 = *"salga un número par"*=$\{2, 4, 6\}$, B_1 = *"menor o igual que 3"*=$\{1, 2, 3\}$, C_1 = *"número 1"*=$\{1\}$, D_1 = *"número par mayor que 5"*=$\{6\}$, E_1 = *"número impar"*=$\{1, 3, 5\}$. D_1 *es un suceso elemental, pero no* E_1*.*

- $\xi_2 =$ *"lanzamiento de tres monedas".* $\Omega_2 = \{CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++\}$. *Sucesos:* $A_2 =$ *"obtener tres caras"*$=\{CCC\}$, $B_2 =$ *"obtener igual resultado"*$=\{CCC, +++\}$.
- $\xi_3 =$ *"lanzamiento de monedas hasta que salga la primera cara".* $\Omega_3 = \{C, +C, ++C, +++C, \ldots\}$. *Sucesos:* $A_3 =$ *"exactamente tres lanzamientos"*$=\{++C\}$, *etc.*
- $\xi_4 =$ *"número de llamadas de teléfono durante un día en Sevilla".* $\Omega_4 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. *Sucesos:* $A_4 =$ *"más de 1000"*$=\{1001, 1002, \ldots\}$, *etc.*
- $\xi_5 =$ *"tiempo en años de duración de un procesador".* $\Omega_5 = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. *Sucesos:* $A_5 =$ *"menos de 2 años de vida"*$=[0, 2)$, $B_5 =$ *"entre 5 y 6 años inclusive"*$=[5, 6]$.

Definición 1.4 *Se dice que **el suceso** A **ha ocurrido** si al realizar el experimento se obtiene un resultado* $w \in A$.

*Se define **el suceso imposible** como aquel suceso que no ocurre nunca, al cual denotaremos por el conjunto vacío* $\emptyset$*, y **suceso seguro** como aquel suceso que ocurre siempre, al cual denotaremos con el mismo símbolo que el del espacio muestral,* Ω.

Ejemplo 1.4 *Realizamos el experimento* $\xi_1 =$ *"lanzamiento de un dado" del ejemplo anterior, y sale un 4. Entonces el suceso* A_1 $(4 \in A_1)$ *sí ha ocurrido y el suceso* B_1 $(4 \notin B_1)$ *no ha ocurrido.*

1.2.3 Operaciones con sucesos

Pasamos a definir la **relación de inclusión** entre dos sucesos.

Definición 1.5 *Diremos que el suceso A está incluido en el suceso B,* $A \subseteq B$*, si "siempre que ocurre A ocurre B".*

Ejemplo 1.5 *Seguimos con el experimento* ξ_1 *del lanzamiento del dado. Podemos decir que:* $C_1 \subseteq B_1$*, y también* $D_1 \subseteq A_1$.

Pero, $A_1 \not\subseteq B_1$*, ya que puede salir un 4* $(4 \in A_1)$ *y por tanto ha ocurrido* A_1*, y sin embargo, no ha ocurrido* B_1*, ya que* $4 \notin B_1$.

Proposición 1.1 *La relación de inclusión de sucesos verifica las siguientes propiedades*

1. $\emptyset \subseteq A, \ \forall A$
2. $A \subseteq \Omega, \ \forall A$
3. $A \subseteq B, \ B \subseteq A \Rightarrow A = B$
4. $A \subseteq B, \ B \subseteq D \Rightarrow A \subseteq D$

Todas estas propiedades y la mayoría de las que siguen pueden verse intuitivamente con la ayuda de los **diagramas de Venn** (ver figura 1.1).

Veamos a continuación, cómo podemos construir nuevos sucesos o expresar sucesos a partir de otros con ayuda de operaciones entre sucesos.

Definición 1.6 *Se definen las siguientes operaciones entre sucesos:*

- *El* ***suceso unión de dos sucesos****,* $A \cup B$*, se define como:*

$$A \cup B = \{w \in \Omega / w \in A \text{ o } w \in B\}$$

es decir, es el suceso que ocurre cuando ocurre alguno de los dos sucesos.

- *El* ***suceso intersección de dos sucesos****,* $A \cap B$*, se define como:*

$$A \cap B = \{w \in \Omega / w \in A \text{ y } w \in B\}$$

es decir, es el suceso que ocurre cuando ocurren ambos sucesos simultáneamente.

Ejemplo 1.6 *Para el experimento del lanzamiento de un dado* (ξ_1)*, tendríamos:*

- $A_1 \cup B_1 =$ *"número par o menor o igual que 3"*$=\{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- $A_1 \cap B_1 =$ *"número par y menor o igual que 3"*$=\{2\}$.

Definición 1.7 *Se dice que dos sucesos* A *y* B *son* ***disjuntos, incompatibles o mutuamente excluyentes*** *si* $A \cap B = \emptyset$*, es decir, su intersección es el suceso imposible.*

Ejemplo 1.7 *Para el experimento del lanzamiento de un dado* (ξ_1)*, los sucesos* $A_1 =$ *"número par" y* $E_1 =$ *"número impar", son disjuntos, ya que no ocurren nunca simultáneamente,* $A_1 \cap E_1 = \emptyset$.

Nota 1.1 *Dos sucesos elementales distintos cualesquiera son siempre disjuntos entre sí.*

Proposición 1.2 *Tanto la unión como la intersección de sucesos verifican las propiedades,* $\forall A, B, C$ *sucesos:*

1. *Asociativa:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$*, y* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
2. *Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A$*, y* $A \cap B = B \cap A$.
3. *Idempotente:* $A \cup A = A$*, y* $A \cap A = A$.
4. *Simplificativa:* $A \cup \emptyset = A$*, y* $A \cap \Omega = A$.
5. $A \cup \Omega = \Omega$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$.
6. $A \subseteq B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{array} \right.$.
7. *Distributiva:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Esta propiedad se puede generalizar a un número finito de sucesos y a un número infinito numerable de sucesos.

Ejemplo 1.8 *La propiedad conmutativa se comprueba en el experimento aleatorio del lanzamiento del dado, ξ_1, y con los sucesos A_1 y B_1, ya que, $A_1 \cup B_1 =$"número par o menor o igual que 3", es el mismo suceso que $B_1 \cup A_1 =$"menor o igual que 3 o número par"*

$$A_1 \cup B_1 = B_1 \cup A_1 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

Cuando tenemos una familia de sucesos $\{A_i\}_{i\in I}$, ésta puede cumplir las siguientes propiedades.

Definición 1.8 *La familia de sucesos $\{A_i\}_{i\in I}$ forman un* ***sistema completo de sucesos de*** Ω*, si verifican que*

1. $\cup_{i\in I} A_i = \Omega$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i, j \in I$, $i \neq j$.

Definimos otras nuevas operaciones entre sucesos.

Definición 1.9 *Se definen las siguientes operaciones entre sucesos:*

- *El suceso* ***diferencia de dos sucesos****, $A \setminus B$ o $A - B$:*

$$A \setminus B = A - B = \{w \in \Omega / w \in A \text{ y } w \notin B\}$$

  es decir, es el suceso que ocurre cuando ocurre el primer suceso A, pero no ocurre el segundo suceso B.

- *El suceso* ***complementario de un suceso*** *A, al que representaremos por $\bar{A}$ o en algunas ocasiones por A^c:*

$$\bar{A} = \Omega \setminus A = \Omega - A = \{w \in \Omega / w \notin A\}$$

  es decir, es el suceso que ocurre cuando no ocurre A.

Nota 1.2 *De la misma definición de la operación diferencia de sucesos y las operaciones intersección y complementario, existe la siguiente relación entre estas operaciones, que resultará muy útil:*

$$A \setminus B = A - B = A \cap \bar{B}$$

Ejemplo 1.9 *Considerando el experimento aleatorio de lanzar un dado, ξ_1, tendríamos*

- *El complementario de A_1 es: $\bar{A}_1 =$"número impar"$=E_1$.*
- *$A_1 - B_1 =$"número par y no sea menor o igual que 3"$=\{4, 6\}$. Podemos ver que coincide con $A_1 \cap \bar{B}_1$:*

$$A_1 \cap \bar{B}_1 = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$$

Proposición 1.3 *La operación complementario de un suceso verifica las siguientes propiedades:*

(1) $\overline{(\bar{A})} = A$,

(2) *Si $A \subseteq B$ entonces $\bar{B} \subseteq \bar{A}$,*

(3) $\bar{\Omega} = \emptyset$, $\bar{\emptyset} = \Omega$,

(4) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ *(A es disjunto de su suceso complementario* $\bar{A}$*), y* $A \cup \bar{A} = \Omega$*; por lo que A y* $\bar{A}$ *forman un sistema completo de sucesos.*

Ejemplo 1.10 *Se puede comprobar con el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado que:* $A_1 =$ *"número par"*$=\{2,4,6\}$*, su complementario es* $\bar{A}_1 =$ *"número impar"*$=\{1,3,5\}$*, y el complementario de* $\bar{A}_1$*,* $\overline{(\bar{A}_1)} =$ *"número par"*$=A_1$*.*

Proposición 1.4 *Las* ***leyes de Morgan*** *establecen:*

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Se puede generalizar para uniones e intersecciones finitas o numerables.

Ejemplo 1.11 *Se puede comprobar con el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado que:*

- $$A_1 \cup B_1 = \{1,2,3,4,6\}, \qquad \overline{A_1 \cup B_1} = \{5\}$$
  $$\bar{A}_1 \cap \bar{B}_1 = \{1,3,5\} \cap \{4,5,6\} = \{5\}$$
- $$A_1 \cap B_1 = \{2\}, \qquad \overline{A_1 \cap B_1} = \{1,3,4,5,6\}$$
  $$\bar{A}_1 \cup \bar{B}_1 = \{1,3,5\} \cup \{4,5,6\} = \{1,3,4,5,6\}$$

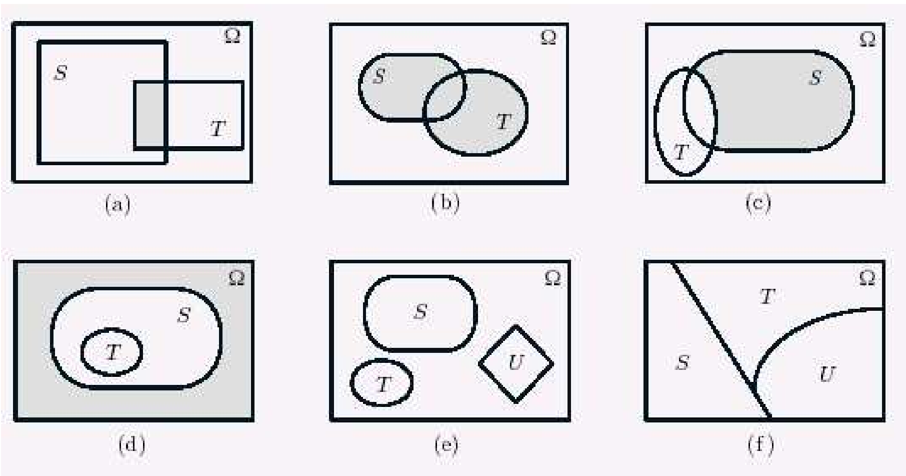

Figura 1.1: Ejemplos de diagramas de Venn. (a) La región sombreada es $S \cap T$. (b) La región sombreada es $S \cup T$. (c) La región sombreada es $S \cap \bar{T}$. (d) Aquí, $T \subseteq S$, la región sombreada es el complemento de S. (e) Los conjuntos S, T, y U son disjuntos. (f) Los conjuntos S, T, y U forman una partición del conjunto Ω.

1.2.4 Álgebra de sucesos

Vamos a definir a continuación la estructura matemática sobre la que vamos a construir el concepto de probabilidad.

Definición 1.10 *Sea el espacio muestral Ω asociado a un experimento ξ, y sea $\mathcal{A}$ un conjunto de sucesos de Ω. $\mathcal{A}$ es* ***álgebra*** *($\mathcal{A}$ es $\sigma-$**álgebra**) si:*

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(2) si $A \in \mathcal{A}$ *entonces* $\bar{A} \in \mathcal{A}$, *y*

(3) si $A, B \in \mathcal{A}$ *entonces* $A \cup B \in \mathcal{A}$ *(si* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ *entonces* $\cup_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$*).*

A la pareja $(\Omega, \mathcal{A})$ se le llama ***espacio medible asociado al experimento aleatorio*** ξ.

Proposición 1.5 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $\emptyset \in \mathcal{A}$. Además, si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.*

En resumen, podemos decir que al realizar cualquiera de las operaciones que hemos visto entre sucesos de un álgebra obtendremos siempre sucesos que también son del álgebra.

Nota 1.3 *Para cualquier espacio muestral Ω, el conjunto de* ***todos*** *los sucesos o subconjuntos de Ω, al que llamaremos* ***partes de Omega*** *y representaremos como $\mathcal{P}(\Omega)$, es evidentemente un álgebra.*

Ejemplo 1.12 *Algunos ejemplos de álgebras triviales son:*

- $\mathcal{P}(\Omega)$.
- *Dado un suceso* $A \subset \Omega$, $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$.
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.
- *Dado* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *se tiene que:*

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$$

  sí es álgebra.

  Y

$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}\}$$

  no es álgebra, ya que, por ejemplo:

$$\{1\} \cup \{3, 4\} = \{1, 3, 4\} \notin \mathcal{A}_2$$

1.3 Definición de probabilidad

1.3.1 Introducción. Definición frecuentista de probabilidad

Cuando decimos que para una moneda perfecta en un 50% de los casos sale cara (tiene probabilidad 0.5 de salir cara), estamos diciendo que aproximadamente "la mitad de las veces que tiramos la moneda sale cara".

Sabemos que la frecuencia relativa de un suceso se puede expresar como:

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

donde n_A es el número de veces que ocurre A, y n es el número total de veces que se realiza el experimento.

La frecuencia relativa verifica las siguientes propiedades:

(1) $f_A \geqq 0$,

(2) $f_\Omega = 1$,

(3) $f_{A\cup B} = f_A + f_B$, si $A \cap B = \emptyset$.

Se define la probabilidad de un suceso, según la teoría frecuentista, como el valor en torno al cual se estabilizan las frecuencias relativas de ese suceso (calculadas realizando un **número elevado de pruebas**) o dicho de otra forma como el límite de la frecuencia relativa cuando el número de observaciones tiende a infinito:

$$\mathrm{P}[A] = \lim_{n\to\infty} f_A$$

Ejemplo 1.13 *Se les ha preguntado a 1000 personas que viven en Sevilla si leen el periódico deportivo META y de ellos 200 lo leen.*

La frecuencia relativa del suceso A = "leer el periódico META" para estos datos sería:

$$f_A = \frac{200}{1000} = 0.2$$

Luego, si consideramos que $n = 1000$ datos es un número elevado de consultas, podríamos considerar que ***la probabilidad de que una persona elegida al azar de entre las que vive en Sevilla lea el periódico META es igual a 0.2****, es decir:*

$$\mathrm{P}[A] \approx f_A = 0.2$$

Surgen inconvenientes, como ¿cuál es el número a partir del cual se considera un número elevado de pruebas?, o que existen experimentos en los que cada realización cuesta dinero, por lo que podría ser imposiblemente económicamente obtener una probabilidad.

Un médico afirma que un paciente concreto tiene una probabilidad 0.9 (algunas veces expresada como el 90%) de que se cure de su enfermedad. Tal afirmación conlleva alguna información, pero no en términos de frecuencias. Es una expresión del **pensamiento subjetivo** del médico (**definición subjetiva de probabilidad**). Uno puede pensar que los pensamientos subjetivos no son interesantes, al menos desde un punto de vista matemático o científico, pero por otro lado, habitualmente se toman decisiones en presencia de incertidumbre basándose en probabilidades subjetivas de forma sistemática y consistente (también en el campo de la Economía).

1.3.2 Definición axiomática de probabilidad

Definición 1.11 (Definición axiomática de probabilidad) *Sea un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{A})$ *asociado a un experimento aleatorio* ξ*. Se dice que* $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *es una **medida de probabilidad** si verifica:*

(i) ***Axioma de Positividad:*** $\mathrm{P}[A] \geqq 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$.

(ii) ***Axioma de Normalización:*** $\mathrm{P}[\Omega] = 1$.

(iii) ***Axioma de Aditividad:*** *si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra, dados dos sucesos* $A, B \in \mathcal{A}$*, disjuntos, es decir:* $A \cap B = \emptyset$*, se verifica:*

$$\mathrm{P}[A \cup B] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B]$$

(iii) o ***Aditiva numerable:*** *si* $\mathcal{A}$ *es un* $\sigma-$*álgebra, dados los sucesos* $\{A_i\}_{i \geqq 1}, \ A_i \in \mathcal{A}, \forall i \geqq 1$*, disjuntos dos a dos, es decir:* $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$*, se verifica:*

$$\mathrm{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \mathrm{P}[A_1] + \mathrm{P}[A_2] + \mathrm{P}[A_3] + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}[A_i]$$

A la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *se le llama **espacio de probabilidad asociado a*** Ω.

Ejemplo 1.14 *Sea el experimento aleatorio* $\xi =$*"lanzamiento de una moneda", cuyo espacio muestral es* $\Omega = \{C, +\}$*. Consideramos como álgebra* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, C, +, \Omega\}$*, es decir, partes de* Ω.

Definimos la siguiente función P*, entre* $\mathcal{A}$ *y* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} P : \mathcal{A} &\to \mathbb{R} \\ \emptyset &\to 0 \\ C &\to \tfrac{1}{2} \\ + &\to \tfrac{1}{2} \\ \Omega &\to 1 \end{aligned}$$

¿Es P *una probabilidad?*

Es directa la comprobación de que el primer axioma (positividad) y el segundo axioma (normalización) se verifican. Veamos ahora si se verifica el tercer axioma (aditividad) entre sucesos disjuntos:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[\emptyset \cup \{C\}] = \mathrm{P}[\{C\}] = \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \mathrm{P}[\emptyset] + \mathrm{P}[C] \\ \mathrm{P}[\emptyset \cup \{+\}] = \mathrm{P}[\{+\}] = \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \mathrm{P}[\emptyset] + \mathrm{P}[+] \\ \mathrm{P}[\emptyset \cup \Omega] = \mathrm{P}[\Omega] = 1 = 0 + 1 = \mathrm{P}[\emptyset] + \mathrm{P}[\Omega] \\ \mathrm{P}[\{C\} \cup \{+\}] = \mathrm{P}[\Omega] = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \mathrm{P}[C] + \mathrm{P}[+] \end{aligned}$$

Por tanto, sí se verifica el axioma 3 (ya no hay más parejas de sucesos disjuntos en $\mathcal{P}(\Omega)$*), y de aquí que la función* P *sea una verdadera probabilidad.*

Esta comprobación se ha realizado sobre un número reducido de parejas de sucesos disjuntos, ya que tan solo había 4 elementos en $\mathcal{P}(\Omega)$*, pero esta comprobación se haría muy larga cuando el número de elementos del álgebra con el que trabajemos sea muy grande.*

Nota: *Si hubiéramos asignado, por ejemplo,* $\mathrm{P}[C] = \frac{1}{3}$ *y a* $\mathrm{P}[+] = \frac{1}{3}$*, esta nueva función, no sería una medida de probabilidad, ya que:*

$$\mathrm{P}[\{C\} \cup \{+\}] = \mathrm{P}[\Omega] = 1 \neq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \mathrm{P}[\{C\}] + \mathrm{P}[\{+\}]$$

Hay otras muchas propiedades naturales de una medida de probabilidad, las cuales no se han incluido en los axiomas anteriores por una razón muy sencilla y es que se pueden deducir de ellos.

Proposición 1.6 *Dado un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *se verifican las siguientes propiedades sobre la probabilidad* P *sobre un álgebra (*$\mathcal{A}$ *es un álgebra):*

(1) $\forall A \in \mathcal{A}$ *se verifica:* $\mathrm{P}\left[\bar{A}\right] = 1 - \mathrm{P}[A]$.

(2) $\mathrm{P}[\emptyset] = 0$.

(3) $\forall A, B \in \mathcal{A}$*, se verifica que:* $\mathrm{P}[B \setminus A] = \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap B]$.

(4) $\forall A, B \in \mathcal{A}$*, se verifica que:*

$$\mathrm{P}[A \cup B] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap B]$$

(5) $\forall A, B \in \mathcal{A}$*, si* $A \subseteq B$ *entonces se verifica:*

- $\mathrm{P}[B \setminus A] = \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A]$.
- $\mathrm{P}[A] \leqq \mathrm{P}[B]$.
- $\forall A$ *se tiene que:* $\mathrm{P}[A] \leqq 1$*, por lo que:*

$$\boxed{0 \leqq \mathrm{P}[A] \leqq 1}$$

(6) Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *disjuntos dos a dos* $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$*, entonces se verifica que:*

$$\mathrm{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}[A_i]$$

(7) Inclusión-exclusión:

$$\mathrm{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}[A_i] - \sum_{i<j}\sum \mathrm{P}[A_i \cap A_j] + \sum_{i<j<k}\sum\sum \mathrm{P}[A_i \cap A_j \cap A_k] - \ldots + \\ + (-1)^{n+1}\,\mathrm{P}[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$$

(8) Subaditividad: $\mathrm{P}\left[\cup_{i=1}^{n} A_i\right] \leqq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}[A_i]$.

Demostremos algunas de las propiedades anteriores.

Demostración:

(1) $\bar{A}, \Omega \in \mathcal{A}$ por ser ésta álgebra. Por axioma 2: $\mathrm{P}[\Omega] = 1$. Como $\Omega = A \cup \bar{A}$ y $A \cap \bar{A} = \emptyset$, por axioma 3 tenemos:

$$1 = \mathrm{P}[\Omega] = \mathrm{P}\left[A \cup \bar{A}\right] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}\left[\bar{A}\right] \Rightarrow \mathrm{P}\left[\bar{A}\right] = 1 - \mathrm{P}[A]$$

(2)
$$\bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P}[\emptyset] = \mathrm{P}\left[\bar{\Omega}\right] = 1 - \mathrm{P}[\Omega] = 1 - 1 = 0$$

(3) Se tiene, por la propiedad simplificativa: $B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$, y puede probarse que $(B \cap A)$ y $(B \setminus A)$ son disjuntos. Luego por axioma 3:

$$\mathrm{P}[B] = \mathrm{P}[B \cap A] + \mathrm{P}[B \setminus A] \Rightarrow \mathrm{P}[B \setminus A] = \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[B \cap A] \tag{1.1}$$

(4) $A \cup B$ puede escribirse también como $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, es decir, la unión de dos sucesos A y $B \setminus A$, disjuntos. Utilizando la propiedad anterior:

$$\mathrm{P}[A \cup B] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B \setminus A] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap B]$$

(5) Por (1.1) se tiene:

$$\mathrm{P}[B \setminus A] = \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap B] \underset{\substack{\uparrow \\ A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A}}{=} \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A] \tag{1.2}$$

Para demostrar que $\mathrm{P}[A] \leqq \mathrm{P}[B]$, cuando $A \subseteq B$, utilizamos el resultado (1.2): $\mathrm{P}[B \setminus A] = \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A]$ y como por axioma 1, $\mathrm{P}[B \setminus A] \geqq 0$, se tiene:

$$\mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A] \geqq 0 \Rightarrow \mathrm{P}[A] \leqq \mathrm{P}[B]$$

Está claro que $\forall A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq \Omega$ por lo que:

$$\mathrm{P}[A] \leqq \mathrm{P}[\Omega] = 1$$

demostrando así la última parte de esta proposición.

■

Ejemplo 1.15 *Consideramos un dado con en el que la probabilidad de cada resultado es proporcional al número de puntos inscritos en ella. Hallar: (a)* $\mathrm{P}[\text{“par”}]$*, (b)* $\mathrm{P}[\text{“resultado mayor que 5”}]$*, y (c)* $\mathrm{P}[\text{“impar o cuatro”}]$*.*

Solución:

En el experimento aleatorio $\xi =$ *“lanzar un dado preparado”, con espacio muestral* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. Nos dan una medida de probabilidad (consideramos que está definida sobre el álgebra partes de* Ω*) de la que conocemos solamente la probabilidad de los sucesos elementales en función de cierto valor de k*

$$\mathrm{P}[\{1\}] = 1\ k,\ \mathrm{P}[\{2\}] = 2\ k,\ \mathrm{P}[\{3\}] = 3\ k,\ \mathrm{P}[\{4\}] = 4\ k,\ \mathrm{P}[\{5\}] = 5\ k,\ \mathrm{P}[\{6\}] = 6\ k$$

Podemos determinar ese valor desconocido k, ya que sabemos que $\mathrm{P}[\Omega] = 1$ *y por la propiedad (6) de la proposición 1.6 (ya que los sucesos elementales son disjuntos 2 a 2), podemos decir*

$$\begin{aligned} 1 = \mathrm{P}[\Omega] &= \mathrm{P}[\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}] = \\ &= \mathrm{P}[1] + \mathrm{P}[2] + \mathrm{P}[3] + \mathrm{P}[4] + \mathrm{P}[5] + \mathrm{P}[6] = \\ &= k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = \\ &= 21k \end{aligned}$$

de donde $k = \dfrac{1}{21}$.

A partir de aquí, conocemos las probabilidades de los sucesos elementales. Esta información en este espacio muestral, es suficiente para conocer la probabilidad de todos los sucesos.

(a) *Definimos el suceso* $A =$*"número par"*$= \{2, 4, 6\}$. *Su probabilidad la podemos calcular por la propiedad (6):*

$$\mathrm{P}[A] = \mathrm{P}[\{2\}] + \mathrm{P}[\{4\}] + \mathrm{P}[\{6\}] = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = 0.571$$

(b) *Definimos el suceso* $B =$*"resultado mayor que 5"*$= \{6\}$. *Luego su probabilidad es* $\mathrm{P}[B] = \mathrm{P}[\{6\}] = \dfrac{6}{21} = 0.286$.

(c) *Definimos los sucesos* $C =$*"número impar"*$= \bar{A}$ *y* $D =$*"número 4"*$= \{4\}$. *Su probabilidad es*

$$\mathrm{P}[C \cup D] \underset{\substack{\uparrow \\ disj.}}{=} \mathrm{P}[C] + \mathrm{P}[D] \underset{\substack{\uparrow \\ P.1}}{=} (1 - \mathrm{P}[A]) + \mathrm{P}[D] = 1 - \frac{12}{21} + \frac{4}{21} = \frac{13}{21} = 0.619$$

■

Ejemplo 1.16 *Consideramos una población en la que el* 40% *son universitarios (B), el* 30% *mujeres (A) y un* 25% *mujeres universitarias. Elegida una persona al azar, calcular: (a)* $\mathrm{P}[A \cup B]$*, (b)* $\mathrm{P}\left[\bar{A} \cap \bar{B}\right]$.

Solución:

Consideramos el experimento aleatorio $\xi =$*"elegir una persona al azar de un grupo", cuyo espacio muestral vendría dado por cada una de estas personas. Nos dicen la probabilidad de los sucesos* $\mathrm{P}[A] = 0.3$, $\mathrm{P}[B] = 0.4$ *y* $\mathrm{P}[A \cap B] = 0.25$. *Nos piden:*

(a) *Los sucesos* $A =$*"mujeres" y* $B =$*"universitarios", no son sucesos disjuntos, por tanto para calcular la probabilidad* $\mathrm{P}[A \cup B]$*, utilizamos la propiedad (4) de la proposición 1.6.*

$$\mathrm{P}[A \cup B] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap B] = 0.3 + 0.4 - 0.25 = 0.45$$

(b) *Nos ayudamos de las leyes de Morgan para obtener esta probabilidad*

$$\mathrm{P}\left[\bar{A} \cap \bar{B}\right] = \mathrm{P}\left[\overline{A \cup B}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ P.1}}{=} 1 - \mathrm{P}[A \cup B] = 1 - 0.45 = 0.55$$

■

1.4 Probabilidad en espacios muestrales finitos.

Consideramos un espacio muestral $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ finito, y **el álgebra asociado de aquí en adelante siempre será** $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, por lo que tiene sentido calcular la probabilidad de cualquier suceso (subconjunto) de Ω.

Veamos cómo es posible construir de forma natural una función $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ de forma que verifique las propiedades de una medida de probabilidad.

Teniendo en cuenta que $A \in \mathcal{A}$, se puede expresar como una unión finita de sucesos elementales w_i (los sucesos elementales también pertenecen a $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$)

$$A = \bigcup_{w_i \in A} \{w_i\}$$

tendremos que

$$\mathrm{P}[A] = \mathrm{P}\left[\bigcup_{w_i \in A} \{w_i\}\right] = \sum_{w_i \in A} \mathrm{P}[w_i]$$

y por tanto para tener determinada la función de probabilidad es suficiente conocer

$$\mathrm{P}[w_i], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Así pues, lo que haremos será asignarle probabilidades a los sucesos elementales, a partir de estas tendremos determinada la probabilidad de cualquier otro suceso.

¿Qué condiciones deben verificar $\mathrm{P}[w_i], \ i = 1, \ldots, n$?

1. En primer lugar

$$0 \leqq \mathrm{P}[w_i] \leqq 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

   ya que ésta era una condición que debe verificar una probabilidad.

2. Y además

$$\mathrm{P}[\Omega] = \mathrm{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} \{w_i\}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}[w_i] = 1$$

Es decir, las probabilidades de todos los sucesos elementales deben ser valores entre 0 y 1, y sumar la unidad.

Obviamente a partir de las dos condiciones anteriores, se verificarán los tres axiomas de una medida de probabilidad, con lo que efectivamente es una medida de probabilidad.

Proposición 1.7 *En general, siendo Ω discreto, si las probabilidades de los sucesos elementales cumplen las siguientes condiciones:*

- $\mathrm{P}[\{w_i\}] \geqq 0, \ \forall w_i \in \Omega.$
- $\sum_{w_i \in \Omega} \mathrm{P}[\{w_i\}] = 1.$

entonces

$$\boxed{P(A) = \sum_{w_i \in A} \mathrm{P}[\{w_i\}]}$$

Ejemplo 1.17 *Sea* $\Omega = \{w_1, \ldots, w_5\}$*, con* $\mathrm{P}[w_1] = 0.1$*,* $\mathrm{P}[w_2] = 0.2$*,* $\mathrm{P}[w_3] = 0.3$*,* $\mathrm{P}[w_4] = 0.1$*,* $\mathrm{P}[w_5] = 0.3$*, es decir:*

Ω	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
$\mathrm{P}[w_i]$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.3

Se observa que verifican las dos condiciones anteriormente citadas. Calculamos

1. $A = \{w_1, w_2, w_3\} \rightarrow \mathrm{P}[A] = \mathrm{P}[w_1] + \mathrm{P}[w_2] + \mathrm{P}[w_3] = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6.$
2. $B = \{w_2, w_3, w_5\} \rightarrow \mathrm{P}[B] = 0.8.$
3. $\mathrm{P}\left[\bar{A}\right] = \mathrm{P}[\{w_4, w_5\}] = 0.4.$
4. $\mathrm{P}[A \cap B] = 0.5.$
5. $\mathrm{P}\left[\bar{A} \cap B\right] = 0.3.$
6. $\mathrm{P}[A \cup B] = 0.9.$
7. $\mathrm{P}\left[\overline{A \cup B}\right] = 0.1.$

Consideramos ahora que:

Ω	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
$\mathrm{P}[w_i]$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Calculamos

1. $A = \{w_1, w_2, w_3\} \rightarrow \mathrm{P}[A] = \mathrm{P}[w_1] + \mathrm{P}[w_2] + \mathrm{P}[w_3] = 0.2 + 0.2 + 0.2 = 3 \times 0.2 = 0.6.$
2. $B = \{w_2, w_3, w_5\} \rightarrow \mathrm{P}[B] = 3 \times 0.2 = 0.6.$
3. $\mathrm{P}\left[\bar{A}\right] = \mathrm{P}[\{w_4, w_5\}] = 2 \times 0.2 = 0.4.$
4. $\mathrm{P}[A \cap B] = 0.4.$
5. $\mathrm{P}\left[\bar{A} \cap B\right] = 0.2.$
6. $\mathrm{P}[A \cup B] = 4 \times 0.2 = 0.8.$
7. $\mathrm{P}\left[\overline{A \cup B}\right] = 1 - 0.8 = 0.2.$

Nota 1.4 *En el caso de que todos los sucesos elementales tengan la misma probabilidad, resulta aún más fácil, ya que tan sólo hay que contar cuantos sucesos elementales lo forman, y multiplicar por la probabilidad común. Este caso lo veremos en el siguiente apartado.*

Ejemplo 1.18 *Sea el experimento aleatorio $\xi =$"lanzamiento de un dado", con espacio muestral finito $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.*

(a) *Si asignamos $\frac{1}{6}$ a cada suceso elemental, calcular las probabilidades de los sucesos: $A =$"obtener número par", $B =$"menor o igual que 3" y $A \cup B$.*

(b) *Idem, si asignamos probabilidades proporcionales a las puntuaciones de las caras.*

Solución:

Apartado (a) *Obtenemos*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[A] &= \mathrm{P}[\{2,4,6\}] = \mathrm{P}[\{2\}] + \mathrm{P}[\{4\}] + \mathrm{P}[\{6\}] = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 \\
\mathrm{P}[B] &= \mathrm{P}[\{1,2,3\}] = \mathrm{P}[\{1\}] + \mathrm{P}[\{2\}] + \mathrm{P}[\{3\}] = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 \\
\mathrm{P}[A \cup B] &= \mathrm{P}[\{1,2,3,4,6\}] = \mathrm{P}[\{1\}] + \ldots + \mathrm{P}[\{6\}] = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Apartado (b) *Obtuvimos que* $\mathrm{P}[k] = \frac{k}{21}$. *Luego:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[A] = \mathrm{P}[\{2,4,6\}] = \mathrm{P}[\{2\}] + \mathrm{P}[\{4\}] + \mathrm{P}[\{6\}] &= \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} \\
\mathrm{P}[B] = \mathrm{P}[\{1,2,3\}] = \mathrm{P}[\{1\}] + \mathrm{P}[\{2\}] + \mathrm{P}[\{3\}] &= \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} = \frac{6}{21} \\
\mathrm{P}[A \cup B] = \mathrm{P}[\{1,2,3,4,6\}] = \mathrm{P}[\{1\}] + \ldots + \mathrm{P}[\{6\}] &= \frac{1+2+3+4+6}{21} = \frac{16}{21}
\end{aligned}$$

■

Nota 1.5 *Si* Ω *es continuo o no numerable, no es posible asignar probabilidades positivas a cada suceso elemental. En este caso se asociarán generalmente a intervalos.*

1.4.1 Regla de Laplace.

Teorema 1.1 (Regla de Laplace) *Sea* $(\Omega, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$ *un espacio medible con* Ω *finito. Si todos los sucesos elementales son equiprobables, entonces* $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ *se tiene que:*

$$\boxed{\mathrm{P}[A] = \frac{\textit{número de casos favorables a } A}{\textit{número de casos posibles}} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}}$$

Demostración:

Sabemos por axioma 2 que $\mathrm{P}[\Omega] = 1$ y también que $\Omega = \{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \ldots \cup \{w_n\}$. Como los sucesos elementales son disjuntos dos a dos podemos decir:

$$1 = \mathrm{P}[\Omega] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{P}[w_i]}_{=p} = \sum_{i=1}^{n} p = n\, p \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{n}}$$

Por otro lado, todo suceso $A \in \mathcal{A}$ podemos escribirlo como el subconjunto de sucesos elementales favorables o pertenecientes a A, es decir:

$$A = \{w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{ik}\}$$

donde w_{ij} son sucesos elementales de Ω que pertenecen a A para todo $j = 1, \ldots, k$. Por tanto:

$$\mathrm{P}[A] = \mathrm{P}[\{w_{i1}, \ldots, w_{ik}\}] = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}[\{w_{ij}\}] = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

donde k es el número de sucesos elementales que pertenecen a A.

■

Ejemplo 1.19 *Consideramos el experimento aleatorio* $\xi_1 =$*"extraer* ***al azar*** *una carta de una baraja de 40 cartas", y definimos los siguientes sucesos:* $A =$*"as", y* $B =$*"oros". Calcular:* $\mathrm{P}[A \cup B]$.

Solución:

Si consideramos el espacio muestral asociado

$$\Omega = \{1Or, 2Or, \ldots, 10Or, 1C, \ldots, 10B\}$$

ya que Ω es finito y todas las cartas (sucesos elementales) tienen la misma probabilidad de ser elegidas, es decir, el espacio muestral es equiprobable, podemos aplicar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de cualquier suceso. Así,

$$\mathrm{P}[A \cup B] = \frac{13}{40}.$$

O también:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[A] &= \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1, \\
\mathrm{P}[B] &= \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25, \\
\mathrm{P}[A \cap B] &= \frac{1}{40},
\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathrm{P}[A \cup B] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap B] = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}.$$

■

Ejemplo 1.20 *Consideramos el experimento aleatorio $\xi_2 =$"lanzamiento de una moneda correcta 3 veces", y definimos los siguientes sucesos: $A =$"igual resultado", $B =$"mismo resultado 2 veces". Calcular las probabilidades de esos sucesos.*

Solución:

Si consideramos el espacio muestral asociado

$$\Omega = \{CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++\}$$

y $\mathcal{P}(\Omega)$, ya que Ω es finito (tiene 8 elementos) y todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir (sale cara o cruz al azar), es decir, el espacio muestral es equiprobable, podemos aplicar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de cualquier suceso. Así

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[A] &= \mathrm{P}[\{CCC, +++\}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25 \\
\mathrm{P}[B] &= \mathrm{P}[\{CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C\}] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75
\end{aligned}$$

■

Sin embargo, hemos de tener en cuenta que la hipótesis de que los sucesos elementales son igualmente probables, no es una hipótesis acertada en todos los casos.

Ejemplo 1.21 *Supongamos 3 urnas U_1, U_2, U_3, cuya composición es*

- *U_1: 10 bolas blancas y 1 bola negra,*
- *U_2: 100 bolas blancas y 1 bola negra,*
- *U_3: 1000 bolas blancas y 1 bola negra.*

Suponemos el experimento aleatorio consistente en extraer al azar una urna, y de ella al azar una bola. Consideremos el espacio muestral

$$\Omega = \{(U_1, B), (U_2, B), (U_3, B), (U_1, N), (U_2, N), (U_3, N)\}$$

Si suponemos todos los sucesos igualmente probables ($\frac{1}{6}$)*, obtendríamos que*

$$\mathrm{P}\left[B\right] = \mathrm{P}\left[N\right] = \frac{1}{2}$$

lo que no parece un resultado muy lógico.

Una asignación alternativa, que posteriormente tendrá su justificación, sería:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}\left[(U_1, B)\right] = \frac{1}{3}\,\frac{10}{11}, & \mathrm{P}\left[(U_2, B)\right] = \frac{1}{3}\,\frac{100}{101}, & \mathrm{P}\left[(U_3, B)\right] = \frac{1}{3}\,\frac{1000}{1001} \\ \mathrm{P}\left[(U_1, N)\right] = \frac{1}{3}\,\frac{1}{11}, & \mathrm{P}\left[(U_2, N)\right] = \frac{1}{3}\,\frac{1}{101}, & \mathrm{P}\left[(U_3, N)\right] = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1001} \end{array}$$

con lo que se obtendría $\mathrm{P}\left[B\right] = \frac{97670}{101101} = 0.966$*,* $\mathrm{P}\left[N\right] = 0.034$*, y además* $\mathrm{P}\left[U_1\right] = \mathrm{P}\left[U_2\right] = \mathrm{P}\left[U_3\right] = \frac{1}{3}$*, lo que parece más razonable.*

1.5 Combinatoria

En la mayoría de los problemas de probabilidades en los que es aplicable la regla de Laplace, es de gran utilidad el uso de métodos de combinatoria, para facilitar el "conteo" de casos.

Variaciones de n elementos de orden k. Es el número de distintos grupos de k elementos, ordenados y distintos, que se pueden formar con n elementos distintos ($k \leq n$), es decir, es el cardinal del siguiente conjunto:

$$Q = \{(a_1, a_2, ..., a_k)/ \;\; a_i \neq a_j \;\; \forall i \neq j, \;\;\; a_i \in \{1, ..., n\}\; \}$$

Se tiene que

$$card\{Q\} = V_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Ejemplo 1.22 *Números de tres cifras distintas que se pueden formar con los 9 dígitos* $\{1, 2, \ldots, 9\}$

$$V_{9,3} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

Permutaciones de n elementos. Es un caso particular del anterior con $n = k$, es decir, es el número de ordenaciones que se pueden hacer con n elementos distintos, y por tanto, es el cardinal del siguiente conjunto:

$$Q = \{(a_1, a_2, ..., a_n)/ \;\; a_i \neq a_j \;\; \forall i \neq j, \;\;\; a_i \in \{1, ..., n\}\; \}$$

Se tiene que

$$card\{Q\} = P_n = n!$$

Ejemplo 1.23 *Números de cuatro cifras distintas que se pueden formar con los dígitos* $\{1, 2, 3, 4\}$

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Combinaciones de n elementos de orden k. Es el número de grupos no ordenados de k elementos diferentes que se pueden formar con n elementos distintos ($k \leq n$), es decir, es el cardinal del conjunto:

$$Q = \{[a_1, a_2, ..., a_k]/ \;\; a_i \neq a_j \;\; \forall i \neq j, \; a_i \in \{1, ..., n\} \;\}$$

Se tiene que

$$card\{Q\} = C_{n,k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{V_{n,k}}{k!}$$

Ejemplo 1.24 *Número de formas de seleccionar 3 dígitos distintos del conjunto* $\{1, 2, \ldots, 9\}$

$$C_{9,3} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3} = 84$$

Nótese que la diferencia entre las combinaciones y las variaciones es que mientras en las últimas importa el orden, en las primeras no. Así por ejemplo 123 y 132 serían dos elementos distintos de Q en el ejemplo 1.22, y sin embargo ambos son un mismo elemento de Q en el ejemplo 1.24.

Variaciones con repetición de n elementos de orden k. Es el número de distintos grupos de k elementos ordenados que se pueden formar con n elementos distintos, es decir, es el cardinal del siguiente conjunto:

$$Q = \{(a_1, a_2, ..., a_k)/ \;\; a_i \in \{1, ..., n\} \;\}$$

Se tiene que

$$card\{Q\} = VR_{n,k} = n^k$$

Ejemplo 1.25 *Números de tres cifras que se pueden formar con los 9 dígitos* $\{1, 2, \ldots, 9\}$

$$VR_{9,3} = 9^3 = 729$$

Combinaciones con repetición de n elementos de orden k. Es el número de grupos no ordenados de k elementos que se pueden formar con n elementos distintos, es decir, es el cardinal del conjunto:

$$Q = \{[a_1, a_2, ..., a_k]/ \;\; a_i \in \{1, ..., n\} \;\}$$

Se tiene que

$$card\{Q\} = CR_{n,k} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Ejemplo 1.26 *Número de fichas del dominó*

$$CR_{7,2} = \begin{pmatrix} 7+2-1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \times 8}{1 \times 2} = 28$$

De manera esquemática,

	Grupos ordenados	**Grupos no ordenados**
Sin repetición	$n(n-1)...(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
Con repetición	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Otro caso que nos podemos encontrar es aquél en el que existan elementos idénticos entre sí.

Permutaciones con repetición de n elementos donde α_1 de ellos son iguales entre sí, α_2 son iguales entre sí, ..., α_k son iguales entre sí. Es el número de las distintas ordenaciones que se pueden hacer con estos n elementos, teniendo en cuenta que algunos de ellos son idénticos. Es el cardinal del conjunto

$$Q = \{(a_1, a_2, ..., a_n)/ \ \ a_i \in \{1, ..., k\}, \quad \textit{con } \alpha_1 \textit{ iguales entre sí,}$$

$$\alpha_2 \textit{ iguales entre sí, } \ldots, \alpha_k \textit{ iguales entre sí } \}$$

Se tiene que

$$card\{\Omega\} = PR_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_k!}$$

Ejemplo 1.27 *Números que se pueden formar con las cifras del número 1992*

$$PR_4^{1,2,1} = \frac{4!}{1!2!1!} = 12$$